Examen Final - 16 mai 2013

Durée : 2 heures.

L'utilisation de documents, de calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdite.

Pour cette épreuve on pourra utiliser sans démonstration la formule donnant l'aire d'un disque de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1. On considère le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 7,\, 8 - x < y,\, y < x + 1\}.$$

1. Tracer D.
2. Calculer : $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy$.

Exercice 2. On considère la forme différentielle $\omega = x dx - (\sin y)\, dy$, ainsi que la courbe Γ définie par

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x = 0,\, y < x\}$$

et orientée dans le sens trigonométrique.
1. Dessiner Γ.
2. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \omega$.

Exercice 3.
1. Étant donné $a > 0$, calculer l'aire de l'ellipse $E_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant a^2\right\}$.

2. Calculer le volume du solide $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \geqslant 0,\, 1 \geqslant z + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right\}$.

Exercice 4. On considère l'application

$$F : x \mapsto \int_0^\infty e^{-xt} \arctan(t)\, dt.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Pour $x > 0$ on pose $G(x) = xF(x)$. Montrer que $G(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.
3. Montrer que G est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que F est C^2 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \quad xF''(x) + 2F'(x) + xF(x) = \frac{1}{x}.$$

Exercice 5. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$.
On admet que cette intégrale est convergente.

1. On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\Big(\big(x\sin(x) - y\cos(x)\big)\, dx + \big(x\cos(x) + y\sin(x)\big)\, dy\Big).$$

Montrer que ω est fermée.

2. Soit $R > 1$. On considère le domaine

$$D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > 0,\ \frac{1}{R^2} < x^2+y^2 < R^2\right\},$$

et on note Γ_R son contour, orienté de sorte à laisser D_R sur sa gauche. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \omega$.

3. Pour $r > 0$ on note γ_r le demi-cercle $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0,\ x^2+y^2 = r^2\}$, orienté dans le sens trigonométrique, puis $I_r = \int_{\gamma_r} \omega$.

a. Étudier la limite de I_r lorsque r tend vers 0.

b. Montrer que I_r tend vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1. [1 + 2 pts]

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$8 - x = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy &= \int_{x=\frac{7}{2}}^{7} \left(\int_{y=8-x}^{x+1} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy \right) dx = \int_{x=\frac{7}{2}}^{7} \left[-\frac{1}{x+y} \right]_{y=8-x}^{x+1} dx \\ &= \int_{x=\frac{7}{2}}^{7} \left(-\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{8} \right) dx = \left[-\frac{1}{2}\ln(2x+1) \right]_{\frac{7}{2}}^{7} + \frac{7}{16} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{8}\right) + \frac{7}{16}.\end{aligned}$$

Exercice 2. [2 + 2 pts]

On a

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ et } y < x\}$$

Ainsi la courbe Γ parcourt (dans le sens trigonométrique) les trois quarts du cercle de centre (1,0) et de rayon 1, du point (0,0) jusqu'au point (1,1). Pour calculer l'intégrale on peut faire un calcul direct, ou observer que l'application $f \mapsto x^2/2 + \cos(y)$ est une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2$, de sorte que

$$\int_\Gamma \omega = f(1,1) - f(0,0) = \frac{1}{2} + \cos(1) - 1 = \cos(1) - \frac{1}{2}.$$

Pour le calcul direct on peut utiliser le paramétrage $\theta \mapsto (1+\cos(\theta), \sin(\theta))$ pour $\theta \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, et on retrouve bien :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \omega &= \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \big(-(1+\cos(\theta))\sin(\theta) - \sin(\sin(\theta))\cos(\theta) \big)\,d\theta \\ &= \left[\cos(\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{2} + \cos(\sin(\theta)) \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \cos(1) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 3. [2 + 1,5 pts]

1. On considère l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x, 3y) \end{array} \right.$$

Alors φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, c'est une bijection d'inverse $\varphi^{-1}(X,Y) \mapsto \left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{3}\right)$ et la réciproque φ^{-1} est elle-même de classe C^1, donc φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On note D_a le disque de centre 0 et de rayon a. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(X,Y) = \varphi(x,y) = (2x, 3y)$. Alors on a

$$(X,Y) \in E_a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(2x)^2}{4} + \frac{(3y)^2}{9} \leqslant a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leqslant a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in D_a.$$

Ainsi on a $E_a = \varphi(D_a)$. D'après le théorème de changement de variables on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(E_a) &= \iint_{E_a} 1\, dX\, dY = \iint_{\varphi(D_a)} 1\, dX\, dY = \iint_{D_a} \left|\det \mathrm{Jac}\, \varphi(x,y)\right|\, dx\, dy \\
&= 6 \iint_{D_a} 1\, dx\, dy = 6\, \mathrm{Aire}(D_a) = 6\pi a^2.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\det \mathrm{Jac}\, \varphi(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

2. En « sommant par tranches », on a

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_0^1 \mathrm{Aire}(E_{\sqrt{1-z}})\, dz = \int_0^1 6\pi \left(\sqrt{1-z}\right)^2\, dz = 3\pi.$$

Exercice 4. [1,5 + 1,5 + 3 + 1,5 pts]
1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a $0 \leqslant e^{-tx} \arctan(t) \leqslant \frac{\pi}{2} e^{-tx}$. Or on a

$$\int_0^A \frac{\pi}{2} e^{-tx} = \frac{\pi}{2x}(1 - e^{-Ax}) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{\pi}{2x}.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} e^{-tx}\, dt$ est convergente, et par comparaison pour des fonctions à valeurs positives, c'est aussi le cas pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} \arctan(t) e^{-tx}\, dt$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $A > 0$ on a par intégration par parties :

$$\int_0^A x e^{-tx} \arctan(t)\, dt = \left[-e^{-tx} \arctan(t)\right]_0^A + \int_0^A \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

Puisque $-e^{-tA} \arctan(t) \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$, on obtient par passage à la limite ($A \to +\infty$) que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$ est convergente et vaut $xF(x)$.
3. Pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ on pose $g(t,x) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$. L'application g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ (comme quotient de fonctions de classe C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas) et pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = -\frac{t e^{-tx}}{1+t^2}$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}.$$

Soit $a > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x > a$ on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant e^{-ta}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta}\, dt$ est intégrable, donc d'après le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient que G est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$ et pour $x > a$:

$$G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-tx}}{1+t^2}\, dt.$$

De même pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x > a$ on a

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x)\right| \leqslant e^{-ta},$$

donc G est de classe C^2 sur $]a,+\infty[$ et pour $x > a$:

$$G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}\, dt.$$

Ceci étant valable pour tout $a > 0$, on obtient que G est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. En outre, les expressions pour G' et G'' sont valables sur $]0,+\infty[$.

4. Pour tout $x > 0$ on a $F(x) = G(x)/x$. Ainsi F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions de classe C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas. En outre pour tout $x > 0$ on a

$$xF''(x) + 2F'(x) + xF(x) = G''(x) + G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}.$$

Exercice 5. [1,5 + 1,5 + 3 + 1,5 pts]

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on note

$$P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\big(x\sin(x) - y\cos(x)\big) \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\big(x\cos(x) + y\sin(x)\big).$$

Les fonctions P et Q sont de classe C^1 et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\\ &\quad= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\big(-x(x^2+y^2)\sin(x) + y(x^2+y^2)\cos(x) - (x^2+y^2)\cos(x) - 2xy\sin(x) + 2y^2\cos(x)\big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\\ &\quad= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\big((x^2+y^2)\cos(x) - x(x^2+y^2)\sin(x) + y(x^2+y^2)\cos(x) - 2x^2\cos(x) - 2xy\cos(x)\big).\end{aligned}$$

On a donc donc

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Cela signifie que la forme ω est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$\int_{\Gamma_R} \omega = \int_{D_R} \left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) dx\, dy = 0.$$

3. Soit $r > 0$. La courbe γ_r peut être paramétrée par l'application $\theta \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ pour $\theta \in [0,\pi]$. On a alors

$$\begin{aligned}I_r &= \int_0^{\pi} \frac{e^{-r\sin(\theta)}}{r^2}\left(-r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin(r\cos(\theta)) + r^2\sin(\theta)^2\cos(r\cos(\theta))\right) d\theta\\ &\quad+ \int_0^{\pi} \frac{e^{-r\sin(\theta)}}{r^2}\left(r^2\cos(\theta)^2\cos(r\cos(\theta)) + r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(r\cos(\theta))\right) d\theta\\ &= \int_0^{\pi} e^{-r\sin(\theta)}\cos(r\cos(\theta))\, d\theta.\end{aligned}$$

Pour tout $r > 0$ et pour tout $\theta \in [0, \pi]$ on a

$$\left| e^{-r \sin(\theta)} \cos(r \cos(\theta)) \right| \leqslant 1.$$

En outre pour tout $\theta \in]0, \pi[$ on a

$$e^{-r \sin(\theta)} \cos(r \cos(\theta)) \xrightarrow[r \to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad e^{-r \sin(\theta)} \cos(r \cos(\theta)) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0.$$

D'après le théorème de convergence dominée on a donc

$$I_r \xrightarrow[r \to 0]{} \pi \quad \text{et} \quad I_r \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0.$$

4. Pour tout $R > 1$ on a

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\Gamma_R} \omega &= I_R - I_{1/R} + \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin(t)}{t} \, dt + \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin(t)}{t} \, dt \\
&= I_R - I_{1/R} + 2 \int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin(t)}{t} \, dt \\
&\xrightarrow[R \to +\infty]{} -\pi + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt.
\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$