Quelques Corrections

Exercice 3.7.1. La fonction f_1 polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\nabla f_1(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x).$$

Ainsi les points critiques de f_1 sont (0,0) et (1,1). Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\operatorname{Hess} f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a $\det \operatorname{Hess} f_1(0,0) = -9$ et $\det \operatorname{Hess} f_1(1,1) = 27$. La fonction f_1 admet donc un point selle au point (0,0) (qui n'est donc ni minimum local ni maximum local pour f_1), et un minimum local en (1,1). Enfin, puisque $f_1(0,t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty$, la fonction f_1 n'admet pas de minimum global.

Exercice 4.3. L'application f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ car chaque fonction coordonnée est somme de composées de fonction polynômiales et exponentielles. Soit $(u,v,w) \in f(\mathbb{R}^3)$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(u,v,w) = f(x,y,z)$. On a

$$\det \operatorname{Jac} f(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4e^{2y}(2e^{2x} + 2e^{2z}) < 0.$$

D'après le théorème de l'inversion locale, il existe des voisinages ouverts $\mathcal{U}$ de (x,y,z) et $\mathcal{V}$ de (u,v,w) dans $\mathbb{R}^3$ tel que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. En particulier, pour tout $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) \in \mathcal{V}$ il existe $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in \mathcal{U}$ tel que $f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$. Cela prouve que $\mathcal{V} \subset f(\mathbb{R}^3)$, et donc que $f(\mathbb{R}^3)$ est un voisinage de (u,v,w). Comme cela vaut pour tout $(u,v,w) \in f(\mathbb{R}^3)$, cela prouve que $f(\mathbb{R}^3)$ est ouvert. Enfin $f(\mathbb{R}^3)$ ne peut être égal à $\mathbb{R}^3$ puisque la première coordonnée de f ne prend que des valeurs positives.

Exercice 4.10. L'application $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y$ est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2x + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2y - 1.$$

En particulier on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. D'après le théorème des fonctions implicites il existe des ouverts I et J de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\varphi : I \to J$ une fonction de classe C^∞ tels que pour tout $(x,y) \in I \times J$ on a $f(x,y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. Ainsi, au voisinage de (0,0), l'ensemble $\mathcal{C}$ coïncide avec le graphe de φ, que nous étudions maintenant. Pour tout $x \in I$ on a

$$x^4 + \varphi(x)^3 - x^2 - \varphi(x)^2 + x - \varphi(x) = 0.$$

En dérivant par rapport à x on obtient

$$\forall x \in I, \quad 4x^3 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) - 2x - 2\varphi(x)\varphi'(x) + 1 - \varphi'(x) = 0.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que $\varphi'(0) = 1$. En dérivant encore on obtient que

$$\forall x \in I, \quad 12x^2 + 6\varphi(x)\varphi'(x)^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x) - 2 - 2\varphi'(x)^2 - 2\varphi(x)\varphi''(x) - \varphi''(x) = 0,$$

et donc $\varphi''(0) = -4$. Ainsi la tangente à $\mathcal{C}$ au point (0,0) est la droite d'équation $y = x$, et $\mathcal{C}$ se trouve « sous » cette tangente (c'est-à-dire dans le demi-plan d'équation $y \leqslant x$) au voisinage de (0,0).

Au point (1,1), seule la dérivée par rapport à x est non-nulle. On exprime donc x en fonction de y. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe des ouverts J et I de $\mathbb{R}$ contenant 1 et $\psi : J \to I$ de classe C^∞ tels que pour tout $(x, y) \in I \times J$ on a $f(x, y) = 0$ si et seulement si $x = \psi(y)$. Pour tout $y \in J$ on a

$$\psi(y)^4 + y^3 - \psi(y)^2 - y^2 + \psi(y) - y = 0$$

En dérivant on obtient

$$4\psi(y)^3\psi'(y) + 3y^2 - 2\psi(y)\psi'(y) - 2y + \psi'(y) - 1 = 0,$$

et donc $\psi'(1) = 0$ (comme on pouvait s'y attendre du fait que $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0\dots$). En dérivant à nouveau on a

$$12\psi(y)^2\psi'(y)^2 + 4\psi(y)^3\psi''(y) + 6y - 2\psi'(y)^2 - 2\psi(y)\psi''(y) - 2 + \psi''(y) = 0,$$

d'où $\psi''(1) = -\frac{4}{3}$. On en déduit que la tangente à $\mathcal{C}$ au point (1,1) est la droite d'équation $x = 1$, et que $\mathcal{C}$ se trouve « à gauche » de cette tangente au voisinage de (1,1).

Exercice 6.4.2. Pour $t \in]0, 1[$ on pose $\gamma(t) = (t, t)$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_\gamma \omega = \int_0^1 \big(t\sin(t) + t\cos(t)\big)\, dt &= [-t\cos(t) + t\sin(t)]_0^1 + \int_0^1 (\cos(t) - \sin(t))\, dt \\ &= 2\sin(1) - 1.\end{aligned}$$

Exercice 6.10. 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ on a

$$\begin{aligned} d\alpha(x, y) &= \left(-\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2 + y^2}\right) dx \wedge dy \\ &= \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Cela prouve que la forme différentielle α est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.
2. a. La fonction φ est bien définie et dérivable comme composée de fonctions différentiables. En outre elle est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ car l'application $\theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))$ l'est. Le fait que $df = \alpha$ signifie que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a alors

$$\varphi'(\theta) = -\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(\cos(\theta), \sin(\theta)) = -1.$$

Cela implique que φ est de la forme $\theta \mapsto -\theta + b$ sur $\mathbb{R}$, avec $b \in \mathbb{R}$, et contredit le fait que φ est 2π périodique. Par contradiction on a donc montré que la forme différentielle α n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

b. La forme différentielle α est fermée mais n'est pas exacte. Cela ne contredit pas le théorème de Poincaré puisque l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sur lequel elle est définie n'est pas étoilé.