TD n° 6 :

Formes différentielles

Exercice 6.1. Soient $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ et $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
1. Calculer $\varphi(u, v)$ pour $\varphi_1 = dx_2 \wedge dx_4$, $\varphi_2 = dx_4 \wedge dx_2$ et $\varphi_3 = 2\,dx_2 \wedge dx_4 - dx_1 \wedge dx_2 + 4\,dx_3 \wedge dx_2$.
2. Calculer $\varphi(u, v, w)$ pour $\varphi = dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + 2\,dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1$.

Exercice 6.2. On considère sur $\mathbb{R}^n$ les formes multi-linéaires alternées $\omega = dx_1 \wedge dx_2$ et $\alpha = dx_3$. Pour $(u, v, w) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$(\omega \wedge \alpha)(u, v, w) = \omega(u, v)\alpha(w) - \omega(u, w)\alpha(v) + \omega(v, w)\alpha(u).$$

Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est une forme trilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6.3. Montrer que $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et préciser sa dimension.

Exercice 6.4. Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale de ω le long du contour orienté $\mathcal{C}$:
1. $\omega = xy\,dx + (x + y)\,dy$, et $\mathcal{C}$ est l'arc parabole d'équation $y = x^2$ pour x allant de -1 à 2.
2. $\omega = y\sin(x)\,dx + x\cos y\,dy$, et $\mathcal{C}$ est le segment de droite allant de (0,0) au point (1,1).
3. $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$, et $\mathcal{C}$ est l'arc de parabole d'équation $y^2 = 2x + 1$ joignant les points (0,-1) et (0,1), parcouru dans les sens des y croissants.
4. $\omega = xyz\,dx$, et $\mathcal{C}$ est la courbe paramétrée par $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), \cos(t)\sin(t))$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 6.5. On considère

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\right\}.$$

Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = y\,dx + 2x\,dy$ le long du contour de D parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 6.6. On considère sur $\mathbb{R}^2$ les formes $\omega_1 = y^2dx + x^2dy$ et $\omega_2 = x^2dx + y^2dy$. Calculer les intégrales de ω_1 et ω_2 le long de tout cercle de $\mathbb{R}^2$ parcouru une fois dans le sens direct. On effectuera d'abord un calcul direct puis, lorsque c'est possible, on utilisera les propriétés des formes différentielles exactes.

Exercice 6.7. 1. Calculer la dérivée extérieure des formes différentielles suivantes :

$$\omega_1(x, y) = \cos(xy)\,dx, \quad \omega_2(x, y) = e^x\,dx - \sin(y)\,dy, \quad \omega_3(x, y, z) = xyz\,dx \wedge dy.$$

2. Calculer les dérivées extérieures $d^2\omega_1$, $d^2\omega_2$ et $d^2\omega_3$ des formes $d\omega_1$, $d\omega_2$ et $d\omega_3$.

Exercice 6.8. Trouver une 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$ telle que $d\omega = y\,dz \wedge dx - x\,dy \wedge dz$.

Exercice 6.9. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la 1-forme différentielle ω et la fonction f définies par

$$\omega(x, y) = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy \quad \text{et} \quad f(x, y) = x^2y^3.$$

1. Montrer que ω est fermée sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer df. La forme ω est-elle exacte ?
3. Déterminer l'ensemble des fonctions g différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que $dg = \omega$.

Exercice 6.10. On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la 1-forme différentielle

$$\alpha = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

1. Montrer que α est fermée.
2. On suppose qu'il existe une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha = df$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $\varphi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$.

a. Montrer que φ est périodique, calculer sa dérivée, et obtenir une contradiction.

b. Ce résultat contredit-il le théorème de Poincaré ?

Exercice 6.11. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, f une fonction lisse sur $\mathcal{U}$, X et Y deux champs de vecteurs lisses sur $\mathcal{U}$. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\nabla f) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}} X\right) = 0,$$

$$\mathrm{div}(fX) = f\,\mathrm{div}(X) + X \cdot f,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(fX) = f\overrightarrow{\mathrm{rot}}(X) + (\nabla f) \times X,$$

$$\mathrm{div}(X \times Y) = Y \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(X) - X \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(Y).$$

Exercice 6.12. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{\xi}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.
1. Montrer que si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\xi} = 0$ alors il existe une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\overrightarrow{\xi} = \nabla f$.
2. Montrer que si $\mathrm{div}\,\xi = 0$ alors il existe un champ de vecteur $\overrightarrow{\eta}$ de classe C^2 sur $\mathcal{U}$ tel que $\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\eta}$.