TD n° 5 :
Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 5.1. Les sous-ensemble suivants sont-ils des sous-variétés de $\mathbb{R}^2$
- $\Gamma_1 = \{(t, t^2), t \in \mathbb{R}\}$,
- $\Gamma_2 = \{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}_+^*\}$,
- $\Gamma_3 = \{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}^*\}$,
- $\Gamma_4 = \{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}\}$,
- $\Gamma_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$.
- $\Gamma_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$,

On pourra, dans un premier temps, répondre sans justification précise.

Exercice 5.2. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4xy + 2xz + 4y - z = xy + xz + 2x - z = 0\}$$

est une courbe au voisinage de l'origine et déterminer l'espace tangent à cette courbe à l'origine.

Exercice 5.3. Montrer que l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy + xz + 2x + 2y - z = 0\}$$

est une surface au voisinage de l'origine et déterminer l'espace tangent à cette surface à l'origine.

Exercice 5.4. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x, y) = x^2 - y^2$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble défini par l'équation $F(x, y) = \alpha$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5.5. 1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble M_α d'équation $x^2 - y^3 = \alpha$ est-il une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour de telles valeurs de α, et pour $(x_0, y_0) \in M_\alpha$, donner une équation de l'espace tangent à M_α au point (x_0, y_0).

Exercice 5.6. Soit M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 et M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2. Montrer que

$$M_1 \times M_2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n+m} \,|\, a_1 \in M_1, a_2 \in M_2\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$, et préciser sa dimension. On pourra le faire en utilisant chacune des trois caractérisations d'une sous-variété.

Exercice 5.7. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
1. Soit $\gamma :]0, 1[\to M$ une courbe de classe C^1. Montrer que pour tout $t \in]0, 1[$ on a $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.
2. Soient $a \in M$ et $h \in T_aM$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une courbe $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\to M$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(a) = h$.

Exercice 5.8 (Double puits)**.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $V(x) = 4x^2(x^2 - 1)$. Pour $E \in \mathbb{R}$ on note

$$\mathcal{C}_E = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \xi^2 + V(x) = E\}.$$

Pour quelles valeurs de E l'ensemble $\mathcal{C}_E$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^n$? (indication : pour $E = 0$ on pourra par exemple utiliser le paramétrage $(x, \xi) = (\cos\theta, \sin(2\theta))$).

Exercice 5.9. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x, y) = (x^2 + 1 - 2y, x)$.
1. Montrer que φ est un C^∞-difféomorphisme.
2. Déterminer $\varphi_* \xi$ lorsque

$$\xi_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \xi_2(x, y) = y^2 \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \xi_3(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1 - x + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}.$$