TD n° 3 :

Dérivées secondes - Extrema

Exercice 3.1. Après avoir vérifié qu'elles étaient de classe C^2, calculer les matrices Hessiennes des fonctions suivantes :

- $(x, y, z) \mapsto \sin(xyz)$ sur $\mathbb{R}^3$,
- $(x, y) \mapsto \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 3.2. Après avoir vérifiées qu'elles étaient de classe C^3, calculer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions définies par

- $f_1 : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 z + 10y + 7x^4 - 3x^2 z^2 + 2xyz^3 + 5xyz$,
- $f_2 : (x, y) \mapsto \big(ye^x, \cos(xy)\big)$.

Exercice 3.3. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0\}$ et F définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
1. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

Exercice 3.4 (Contre-exemple pour le théorème de Schwarz)**.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f.
2. Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées premières et secondes de f.
3. Déterminer le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1, C^2.

Exercice 3.5 (Équation des cordes vibrantes)**.** Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables $u = x + ct$, $v = x - ct$.

Exercice 3.6. Déterminer l'ensembles des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que la fonction $f : (x, y) \mapsto \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$) vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

Exercice 3.7. Étudier les extrema locaux et globaux des fonctions définies par

- $f_1(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\mathbb{R}^2$,
- $f_2(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$,
- $f_3(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,
- $f_4(x, y) = y^2 + x^2 + xy + 2x - 2y$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.8. Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $F(x, y) = f(x)f(y)$.
1. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction F admet-elle un extremum local en (0,0) ?

Exercice 3.9. Déterminer

$$\inf_{\substack{x>0\\y>0}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \right).$$

Exercice 3.10. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On admet (ou pas) que l'application

$$\phi : x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que ce minimum est atteint au point $A^{-1}b$.