TD n° 1 :
Intégration sur un segment

Exercice 1.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour $x \in [a, b]$, on pose : $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.
1. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$ (pourquoi un tel M existe-t-il ?). Montrer que pour tous $x, y \in [a, b]$ on a :

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M\,|x - y|\,.$$

2. En déduire que la fonction F est continue sur $[a, b]$.

Exercice 2.
Déterminer les primitives (sur le plus grand domaine de définition possible) des fonctions définies de la façon suivante :
1.

$$f_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \quad ; \quad f_2(x) = (1 - x)\sqrt{x} \quad ; \quad f_3(x) = (3x + 2)^3$$
$$f_4(x) = \cos(4x + 1) \quad ; \quad f_5(x) = x\sqrt{1 - x^2}$$

2.

$$f_6(x) = (5\sin x + 2)^3 \cos x \quad ; \quad f_7(x) = \frac{1}{3x + 5} \quad ; \quad f_8(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$
$$f_9(x) = (e^{2x} + 2)^4 e^{2x} \quad ; \quad f_{10}(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$$

3.

$$f_{11}(x) = \sin^2(x)\,; \quad f_{12}(x) = \cos^4(2x)\,; \quad f_{13}(x) = \cos(ax)\cos(bx) \text{ avec } a^2 \neq b^2$$

4.

$$f_{14}(x) = \frac{1}{x^2 + 4}\,; \quad f_{15}(x) = \frac{x}{x^2 + 4}\,; \quad f_{16}(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}\,; \quad f_{17}(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 5}$$

Exercice 3.
En effectuant des intégrations par parties,
1. calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 (2x + 1)e^x\, dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^e x\ln(x)\, dx \quad ; \quad I_3 = \int_1^e \ln(x)\, dx$$
$$I_4 = \int_1^e x(\ln(x))^2\, dx \quad ; \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^x\, dx \quad ; \quad I_6 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\, dx$$

2. déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \arctan(x)\,;\quad f_2(x) = x^{24}\ln(x)\,;\quad f_3(x) = x\sqrt{1+x}\,;\quad f_4(x) = \ln(x^2+2).$

Exercice 4.
En effectuant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx,$$
$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad I_4 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Exercice 5.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 6.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}\,; \quad f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^3+1}\,; \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}.$$

Exercice 7.
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}.$$

Exercice 8.
Calculer la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

Plus généralement, pour un certain $k \geqslant 2$, calculer la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}\right).$$

Exercice 9.
Donner un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de : $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 10.
Pour $n \geqslant 2$ on note $A_1, \ldots, A_n$ les sommets d'un polygône régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} A_1A_k.$$

Exercice 11.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right| \leqslant \frac{K(b-a)^2}{2n}$$

Exercice 12.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue.
1. Montrer que s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.
2. Montrer que si $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.
3. Montrer que le résultat de la question précédente n'est plus valable si on retire l'hypothèse de continuité ou l'hypothèse de positivité pour f.

Exercice 13.
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.