DM n° 2

Corrigé

Exercice 2.
On note
$$D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, |v| < au \right\},$$
et pour $(u,v) \in D$ on pose
$$\phi(u,v) = \left(\sqrt{\frac{a^2+u^2}{1+v^2}}, v\sqrt{\frac{a^2+u^2}{1+v^2}} \right).$$
Cela définit une fonction de classe C^∞ sur D. En outre pour $(u,v) \in D$ on a
$$\sqrt{\frac{a^2+u^2}{1+v^2}} > a,$$
donc
$$\phi(u,v) \in \mathring{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a \right\}.$$
Soient maintenant $(u,v) \in D$ et $(x,y) \in \mathring{R}$. Puisque $x > a > 0$ et $u > 0$ on a
$$\begin{aligned}(x,y) = \phi(u,v) &\iff \begin{cases} x^2 = \frac{a^2+u^2}{1+v^2} \\ y = vx \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + u^2 \\ y = vx \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u = \sqrt{x^2+y^2-a^2} \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}\end{aligned}$$
La racine carrée est bien définie puisque $x^2+y^2 \geqslant a^2$. Ainsi ϕ est une bijection de classe C^1 de D dans $\mathring{R}$. Pour $(u,v) \in D$ on a
$$\operatorname{Jac}_{(u,v)} \phi = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+v^2}\sqrt{\frac{1+v^2}{a^2+u^2}} & -\frac{v}{1+v^2}\sqrt{\frac{a^2+u^2}{1+v^2}} \\ \frac{uv}{1+v^2}\sqrt{\frac{1+v^2}{a^2+u^2}} & \frac{1}{1+v^2}\sqrt{\frac{a^2+u^2}{1+v^2}} \end{pmatrix}$$
donc
$$\left| \operatorname{Jac}_{(u,v)} \phi \right| = \cdots = \frac{u}{1+v^2}.$$

En particulier $\operatorname{Jac}\phi$ est inversible sur D, donc ϕ est un difféomorphisme de classe C^1 de D dans $\mathring{R}$. On effectue alors le changement de variables

$$\int_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_D e^{-(a^2+u^2)}\frac{u}{1+v^2}\,du\,dv.$$

D'après le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned}\int_D e^{-(a^2+u^2)}\frac{u}{1+v^2}\,du\,dv &= e^{-a^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u^2}\left(\int_{-\frac{u}{a}}^{\frac{u}{a}}\frac{1}{1+v^2}\,dv\right)du \\ &= 2e^{-a^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u^2}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)\,du\end{aligned}$$

En effectuant une intégration par parties on obtient alors que pour tout $A>0$

$$\begin{aligned}\int_0^A ue^{-u^2}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)\,du &= \left[-\frac{e^{-u^2}}{2}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)\right]_0^A + \int_0^A \frac{e^{-u^2}}{2a\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)}\,du \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{2(a^2+u^2)}\,du.\end{aligned}$$

Finalement on obtient bien que

$$\int_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = ae^{-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{a^2+u^2}\,du.$$