TD 5 : Séries entières.

Exercice 1.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^k z^n$ converge
1. si $k \geqslant 0$.
2. si $k \leqslant -2$.
3. Que peut-on dire si $k = -1$?

Exercice 2.
Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n}$; 2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{3^n}$; 3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n2^n}$; 4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n^2}$; 5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (\ln n) z^n$

6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)} z^n$; 7. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{\sqrt{n}} z^n \quad (\lambda > 0)$; 8. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où a_n est la n-ième décimale de π ; 10. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) z^n$

Exercice 3.
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \neq 1$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum (1 + a^n) z^n$.

Exercice 4.
Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence des séries obtenues.

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{1-x} \quad ; \quad f_2 : x \mapsto \frac{1}{1+x} \quad ; \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{2-x} \quad ; \quad f_4 : x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+2}$$

$$f_5 : x \mapsto \sqrt{1+2x} \quad ; \quad f_6 : x \mapsto x e^{x^2} \quad ; \quad f_7 : x \mapsto (\cos x)^2$$

Exercice 5.
On considère la série entière ; $\sum_{n\in\mathbb{N}} (2n+1) z^n$.
1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2}$.
3. Pour $x \in]0, 1[$ on note : $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (2n+1) x^n$. Calculer $f(x^2)$ puis $f(x)$.

Exercice 6.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n}$.

Exercice 7.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^{4n-2}}{2n-1}$.

2. Pour $x \in]-1,1[$ on note $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^{4n-2}}{2n-1}$. Calculer $f'(x)$ puis $f(x)$.

Exercice 8.

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ pour un certain $R > 0$. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction g développable en série entière sur $]-R,R[$ telle que pour tout $x \in]-R,R[\setminus\{0\}$: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 9.

Déterminer le développement en série entière de la fonction : $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.