TD 4 : Séries et suites de fonctions.

A. Séries de fonctions.

Exercice 1.
Montrer que les séries de fonctions suivantes convergent normalement sur $\mathbb{R}$:

$$1.\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad ; \quad 2.\ \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 e^{-n-x^2} \quad ; \quad 3.\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)$$

Exercice 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$.
1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On notera f sa somme.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.
3. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = x^n$.
1. Déterminer l'ensemble I des réels x tels que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge. Pour $x \in I$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in I$.
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur I ?
4. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
5. Montrer que la série de fonctions $\sum g_n$ où $g_n(x) = nx^{n-1}$ converge normalement sur $[-a, a]$ pour tout $a \in]0,1[$.
6. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$ pour tout $x \in I$.

Exercice 4.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f_n(x) = \frac{x}{n(x+n)}$.
1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On notera f sa somme.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = ne^{-nx}$.
1. Déterminer l'ensemble I des réels x tels que la série $\sum f_n(x)$ converge. Pour un tel x on notera $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement vers f sur $[a, +\infty[$.
3. a) Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum e^{-nx}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et que sa somme F est une primitive de $-f$ sur $[a, +\infty[$.
b) En déduire la valeur de f sur I.

Exercice 6.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que la série $\sum |a_n|$ est convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = a_n \cos(nx)$.
1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une fonction paire et 2π-périodique.
3. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx)\, dx$ et $\int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx)\, dx$.

Exercice 7.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on note $f_n(x) = \frac{1}{n^2x+n^3}$.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ la série $\sum f_n(x)$ est converge. On note $f(x)$ sa somme.
2. Montrer que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-nx^2}$.
1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. Montrer que la fonction f est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
5. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 9.
Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on note $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2x+n}$. Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]n, n+1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f à déterminer sur $\mathbb{R}_+^*$. Y a-t-il convergence uniforme ? Convergence normale ?

B. Suites de fonctions.

Exercice 11.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on explicitera.
2. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 12.
Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme pour les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.

Exercice 13.
1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{1+nx}$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme pour la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Même question avec la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = nx^2 e^{-nx}$$

Exercice 14.
Etudier les limites suivantes :
1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}\, dx$
2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{x^5}{(1+x^2)^n}\, dx$

C. Normes.

Exercice 15.
Pour tout $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on note :

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| \quad ; \quad \|X\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \quad ; \quad \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

1. Montrer que les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\|X\|_\infty \leqslant \|X\|_2 \leqslant \|X\|_1 \leqslant 2\|X\|_\infty$$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ et $Y \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\|X_n - Y\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longleftrightarrow \|X_n - Y\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longleftrightarrow \|X_n - Y\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exercice 16.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère les fonctions suivantes :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x - (n-1) & \text{si } x \in [n-1, n[\\ n + 1 - x & \text{si } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad g_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n^2}(x+n) & \text{si } x \in [-n, 0[\\ \frac{1}{n^2}(n-x) & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_n : x \mapsto \begin{cases} n^{\frac{3}{2}} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[\\ 2\sqrt{n} - n^{\frac{3}{2}} x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers des fonctions f, g et h respectivement.
2. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge absolument. Pour une fonction $u \in E$ on note :

$$\|u\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |u(x)| \, dx$$

Montrer que l'application $u \mapsto \|u\|_1$ est une norme sur E.
3. A-t-on : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$? $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?
4. Même questions pour les suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Construire des fonctions v_n continues, bornées et d'intégrales absolument convergentes sur $\mathbb{R}$ telles que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction v sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\|v_n - v\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad \text{et } \|v_n - v\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$