# TD 3 : Intégrales généralisées.

**Exercice 1.**
Donner un équivalent simple des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{3x^2+4x}{x^3+4x+1} \text{ (en 0 et en } +\infty); \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)+\sqrt{x}} \text{ (en 0 et en } +\infty)$$

$$f_3(x) = \frac{2\sqrt{x}+\sin(x)}{x+\ln(x)} \text{ (en } 0^+ \text{ et } +\infty); \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ (en } +\infty)$$

$$f_5(x) = \cos(x^2) \text{ (en 0)}; \quad f_6(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos(x)}{x} \text{ (en 0 et en } +\infty)$$

$$f_7(x) = \ln(1+\sin(x)) \text{ (en 0)}; \quad f_8(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ (en } +\infty)$$

**Exercice 2.**
**1.** Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes :

$$1) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt\,; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,dt\,; \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2}\,dt$$

$$4) \int_0^1 (\ln t)^2\,dt\,; \quad 5) \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{1+t^4}}\,dt \quad 6) \int_{-\infty}^0 e^t\cos(t^2)\,dt$$

**2.** Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes :

$$7) \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}\,dt\,; \quad 8) \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^\alpha}\,dt$$

**Exercice 3.**
**1.** Montrer qu'on a :

$$\sqrt{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \sqrt{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x/2}$$

**2.** En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\,dt$ est convergente.

**Exercice 4.**
On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2^{n+1}(x-n) & \text{si } x \in [n, n+2^{-(n+1)}[ \\ 2^{n+1}(n+2^{-n}-x) & \text{si } x \in [n+2^{-(n+1)}, n+2^{-n}[ \\ 0 & \text{si } x \in [n+2^{-n}, n+1[ \end{cases}$$

**1.** Dessiner l'allure du graphe de $f$.
**2.** Montrer que $f$ n'a pas de limite en $+\infty$.
**3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on a : $\int_0^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.
**4.** Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est croissante. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

**Exercice 5.**
**1.** Montrer que les deux intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\,dt$ sont convergentes.
**2.** Montrer que pour tout $A \geqslant 0$ on a :

$$\int_2^{2A} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \int_1^A \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt \quad \text{et} \quad \int_{\frac{2}{A}}^2 \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \int_{\frac{1}{A}}^1 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

**3.** En déduire que les deux intégrales de la question 1 ont même valeur.

**Exercice 6.**
On note : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$
**1.** Déterminer le domaine de définition de $\Gamma$.
**2.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

**Exercice 7.**
**1.** a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$.
b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
**2.** a) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ on a : $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geqslant \frac{2}{k\pi}$.
b) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ est divergente.