TD 2 : Calculs d'intégrales

A. Calculs de primitives.

Dans ces exercices on ne se préoccupera pas des domaines de définition des fonctions, mais on restera bien conscient qu'elles ne sont pas forcément définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 1.
Déterminer les primitives des fonctions définies de la façon suivante :
1.

$$f_1(x) = 3x^3 + x^2 - 2 \quad ; \quad f_2(x) = (1-x)\sqrt{x} \quad ; \quad f_3(x) = (2x+3)^3$$
$$f_4(x) = \cos(3x+2) \quad ; \quad f_5(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$$

2.

$$f_6(x) = (3\sin x + 2)^4 \cos x \quad ; \quad f_7(x) = \frac{1}{2x+7} \quad ; \quad f_8(x) = \frac{1}{1+e^x}$$
$$f_9(x) = (e^{2x}+1)^4 e^{2x} \quad ; \quad f_{10}(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

3.

$$f_{11}(x) = \sin^2(x)\,; \quad f_{12}(x) = \cos^4(2x)\,; \quad f_{13}(x) = \cos(ax)\cos(bx) \text{ avec } a^2 \neq b^2$$

4.

$$f_{14}(x) = \frac{1}{x^2+4}\,; \quad f_{15}(x) = \frac{x}{x^2+4}\,; \quad f_{16}(x) = \frac{x^2}{x^2-4}\,; \quad f_{17}(x) = \frac{1}{x^2+6x+5}$$

Exercice 2.
En effectuant des intégrations par parties,
1. calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 (2x+1)e^x\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^e x\ln(x)\,dx \quad ; \quad I_3 = \int_1^e \ln(x)\,dx$$
$$I_4 = \int_1^e x(\ln(x))^2\,dx \quad ; \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^x\,dx \quad ; \quad I_6 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\,dx$$

2. déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \arctan(x)\,; \quad f_2(x) = x^{24}\ln(x)\,; \quad f_3(x) = x\sqrt{1+x}\,; \quad f_4(x) = \ln(x^2+2)$$

Exercice 3.
En effectuant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}\, dx, \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$$
$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx, \qquad I_4 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$$

Exercice 4.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

B. Application aux calculs de limites : sommes de Riemann

Exercice 5.
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$$

Exercice 6.
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

et plus généralement, pour un certain $k \geqslant 2$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn} \right)$$

Exercice 7.
Donner un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de : $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 8.
Pour $n \geqslant 2$ on note $A_1, \ldots, A_n$ les sommets d'un polygône régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} A_1A_k$$

C. Approximation numérique.

Exercice 9.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right| \leqslant \frac{K(b-a)^2}{2n}$$

Exercice 10.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on note :

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad a_{k+\frac{1}{2}} = a_k + \frac{b-a}{2n}$$

On note également : $I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_{k+\frac{1}{2}}\right)$.

1. Donner une interprétation géométrique de I_n.

2. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - I_n\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$$

où $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$.

Exercice 11.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

1. En effectuant des intégrations par parties, montrer que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(x)\,dx$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note :

$$I_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - I_n\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

où $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$.