TD 1 : Propriétés de l'intégrale

Exercice 1.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une fonction intégrable sur n'importe quel segment de $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer : $\int_{-1}^{a} f(x)\,dx$
3. Même question si $f(1) = 1$.

Exercice 2.
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.
1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ on a : $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Sans utiliser de primitive, calculer : $\int_0^a x\,dx$.

Exercice 4.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = f\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)$ et $v_n = f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)$.
2. Montrer que la fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$.
3. Soit $a \in]0,1[$.
  a) Montrer que f est intégrable sur $[a,1]$.
  b) Montrer qu'il existe deux fonctions constantes g et h telles que :

$$\forall x \in [0,a], \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^a (h-g)(x)\,dx \leqslant 2a$$

  c) Montrer que f est intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 5.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour $x \in [a, b]$, on pose : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
1. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$ (pourquoi un tel M existe-t-il ?). Montrer que pour tous $x, y \in [a, b]$ on a :

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M\,|x - y|$$

2. En déduire que la fonction F est continue sur $[a, b]$.

Exercice 6.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue.
1. On suppose qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$.
a) Montrer qu'il existe x_1, x_2 tels que $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ et :

$$\forall x \in [x_1, x_2], \quad f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$$

b) En déduire que : $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.
2. Montrer que si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.
Attention : *tout ceci n'est valable que parce qu'on a supposé que f est* **continue** *et* **positive**.

Exercice 7.
1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si } x \in]1, 2[\\ 0 & \text{si } x = 2 \\ -1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer : $\int_0^{a+1} f(x)\,dx$
b) Comparer avec les résultats de l'exercice 1
2. Plus généralement, montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction étagée sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{a+1}^{b+1} f(x-1)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exercice 8.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.