Contrôle Continu 1 : lundi 26 octobre.

Durée : 1h15

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites. La présentation et la qualité de la rédaction seront prises en compte lors de la notation.

Exercice 1.
Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 e^{3x+2}\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}+e^x}{e^x+2}\,dx$$

Pour I_2 on pourra effectuer un changement de variable.

Exercice 2.
Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$a. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)-1}{\sin^2(t)}\,dt \quad ; \quad b. \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\frac{1}{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$$

Exercice 3.
Soit $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

est convergente.
1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ l'intégrale généralisée $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = I - \int_0^x f(t)\,dt$$

Pour la suite on notera :

$$G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$$

2. Montrer que la fontion G admet en $+\infty$ une limite que l'on déterminera.
3. Montrer que la fonction G est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Montrer que $G(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Montrer que l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{G(t)}}\,dt$$

est convergente et calculer sa valeur en fonction de I.

Correction

Exercice 1.
Les fonctions $x \mapsto e^{3x+2}$ et $x \mapsto \frac{e^{2x}+e^x}{e^x+2}$ sont continues et donc intégrables respectivement sur les segments $[0,1]$ et $[-1,1]$ de $\mathbb{R}$. On calcule :

$$I_1 = \left[\frac{1}{3}e^{3x+2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(e^5 - e^2)$$

Pour I_2 on a :

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{e^x+1}{e^x+2} e^x \, dx$$

On effectue le changement de variables : $t = e^x$, $dt = e^x dx$. Cela donne :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{e^{-1}}^{e} \frac{t+1}{t+2}\, dt = \int_{e^{-1}}^{e} \left(1 - \frac{1}{t+2}\right) dt = [t - \ln(|t+2|)]_{e^{-1}}^{e} \\ &= e - e^{-1} + \ln\left(\frac{2+e^{-1}}{2+e}\right) \end{aligned}$$

Exercice 2.
a. La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)-1}{\sin^2(t)}$ est définie et continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Au voisinage de 0 on a :

$$\frac{\cos(t)-1}{\sin^2(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-\frac{t^2}{2}}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

soit :

$$\frac{\cos(t)-1}{\sin^2(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)-1}{\sin^2(t)}\, dt$ est faussement généralisée en 0, et donc convergente.

b. La fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-\frac{1}{t}}}{\sqrt{t}}$ est définie, continue et positive sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0 on a :

$$e^{-\frac{1}{t}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$

donc :

$$\frac{1-e^{-\frac{1}{t}}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$ est convergente (intégrale de Riemann), donc $\int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{1}{t}}}{\sqrt{t}}\, dt$ est convergente. En $+\infty$ on a $-\frac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc :

$$e^{-\frac{1}{t}} - 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{t}$$

puis :

$$\frac{1-e^{-\frac{1}{t}}}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}\,dt$ est convergente (intégrale de Riemann), donc $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-\frac{1}{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente. Finalement on obtient que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\frac{1}{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente.

Exercice 3.

1. Soit $x \geqslant 0$. Pour tout $A \geqslant x$ on a d'après la relation de Chasles :

$$\int_x^A f(t)\,dt = \int_0^A f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$$

Comme f est intégrable sur $[0,+\infty[$, le membre de droite admet une limite quand A tend vers $+\infty$, c'est donc également le cas pour le membre de gauche. Cela prouve que f est intégrable sur $[x,+\infty[$. En outre en prenant la limite $A \to +\infty$ dans l'égalité précédente on obtient :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$$

2. Par définition de I on a : $\int_0^x f(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} I$, et donc :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = I - \int_0^x f(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

3. La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f, donc :

$$\frac{d}{dx}\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(I - \int_x^{+\infty} f(t)\,dt\right) = -\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = -f(x)$$

4. Soit $x \geqslant 0$. Pour tout $A \geqslant x+1$ on a :

$$\int_x^A f(t)\,dt = \int_x^{x+1} f(t)\,dt + \int_{x+1}^A f(t)\,dt \geqslant \int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

car l'intégrale entre $x+1$ et A d'une fonction positive est positive. Par passage à la limite $A \to +\infty$ on obtient :

$$G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \geqslant \int_x^{x+1} f(t)dt$$

Or comme f est continue et strictement positive, l'intégrale de f entre x et $x+1$ est strictement positive (c'est l'exercice 6 du TD1). Cela prouve donc que $G(x) > 0$. Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{G(t)}}$ est définie et continue (G est dérivable donc continue) sur $[0,+\infty[$. Pour $A \geqslant 0$ on a :

$$\int_0^A \frac{f(t)}{\sqrt{G(t)}}\,dt = -\int_0^A \frac{G'(t)}{\sqrt{G(t)}} = -\left[2\sqrt{G(t)}\right]_0^A = 2\sqrt{G(0)} - 2\sqrt{G(A)}$$

Or $G(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$, donc le membre de droite admet une limite quand A tend vers $+\infty$. Cela prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{G(t)}}\,dt$ est convergente et par passage à la limite ($A \to +\infty$) on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{G(t)}}\,dt = 2\sqrt{G(0)} = 2\sqrt{I}$$