TD 5 : Transformation de Fourier

Exercice 1.

1. On considère la fonction « porte » définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f. Dessiner les graphes de f et $\widehat{f}$.

2. Soit $T > 0$. On considère la fonction « impulsion » définie par :

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f_T}$ de f_T. Dessiner les graphes de f_T et $\widehat{f_T}$ pour $T = \frac{1}{4}$.

b) Que se passe-t-il lorsque T tend vers 0.

c) Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $g_T : t \mapsto \frac{1}{T} g\left(\frac{t}{T}\right)$. Exprimer $\widehat{g_T}$ en fonction de $\widehat{g}$. Retrouver le résultat de la question a).

3. On considère la fonction porte décalée définie par :

$$f^a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f^a}$ de f^a. Dessiner les graphes de f^a et $\widehat{f^a}$.

b) Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $g^a : t \mapsto g(t-a)$. Exprimer $\widehat{g^a}$ en fonction de $\widehat{g}$. Retrouver le résultat de la question précédente.

4. On considère la fonction « triangle » définie par :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Calculer la transformée de Fourier de Λ.

b) Exprimer Λ' en fonction de f et en déduire $\widehat{\Lambda'}$. Retrouver alors l'expression de $\widehat{\Lambda}$.

c) Montrer que $\Lambda = f * f$. Retrouver alors l'expression de $\widehat{\Lambda}$.

Exercice 2.

1. Pour $a > 0$ on considère la fonction $f_a : t \to e^{-a|t|}$. Calculer sa transformée de Fourier $\widehat{f_a}$.

2. En déduire la transformée de Fourier des fonctions $g : t \to \frac{1}{1+t^2}$ et $h : t \to \frac{t}{(1+t^2)^2}$.

3. En déduire la valeur des intégrales $A(\xi) = \int_0^\infty \frac{\cos \xi t}{1+t^2} dt$ et $B(\xi) = \int_0^\infty \frac{t \sin \xi t}{(1+t^2)^2} dt$.

Exercice 3.

1. On considère la fonction $g : x \to e^{-x^2}$.

a) Vérifier que $g'(x) = -2xg(x)$.

b) En appliquant la transformation de Fourier à l'égalité ci-dessus, obtenir une équation différentielle du premier ordre dont $\widehat{g}$ est solution.

c) En déduire la valeur de $\widehat{g}$. (on rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$)

2. Déterminer l'ensemble des fonctions f de carré intégrable telles que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(x-u)du = e^{-x^2}$$

Exercice 4.

1. On considère la fonction $\phi : t \to \begin{cases} e^t & \text{si } t \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Calculer la transformée de Fourier de ϕ.

2. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t)$$

On suppose que f est une solution de (E) deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telles que f, f' et f'' sont intégrables.

a) Montrer que : $(1 + i\xi)(\widehat{f'} + \widehat{f}) = \widehat{\phi}$.

b) Calculer f (on pourra utiliser pour cela la question 2 de l'exercice 2).

Exercice 5.

Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ et $p_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\int_0^{\infty} |f(t)| \, e^{-pt} \, dt < +\infty$$

Pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\Re p \geq p_0$, on pose :

$$\mathcal{L}(f, p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} \, dt$$

$\mathcal{L}(f)$ est appelée transformée de Laplace de f.

1. Soient $x > p_0$ et H la fonction de Heaviside définie par $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ pour $t < 0$. Vérifier que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f, x + iy)$ est la transformée de Fourier de la fonction $g : t \mapsto H(t)f(t)e^{-xt}$ au point y.

2. En déduire que si on connait $\mathcal{L}(f)$ alors on peut retrouver f.

3. Exprimer $\mathcal{L}(f')$ en fonction de $\mathcal{L}(f)$. Plus généralement, toutes les bonnes propriétés de la transformée de Fourier ont des analogues pour la transformée de Laplace.

4. Calculer la transformée de Laplace de H. Pour quels $p \in \mathbb{C}$ est-elle définie ?

5. Calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto H(t)e^{-\alpha t}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quels $p \in \mathbb{C}$ est-elle définie ?

Finalement la transformée de Laplace est très proche de la transformée de Fourier. L'intérêt de la transformée de Laplace est qu'elle est plus adaptée à l'étude des régimes transitoires (la transformation de Fourier étant plus adaptée à l'analyse des signaux stationnaires).