TD 3 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f qu'on explicitera.
2. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par : $f_n(x) = x^n(1 - x)$.
1. Etudier la fonction f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que f_n converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 3.
On considère la série de fonctions : $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n^2} \sin(nx)$.
1. Montrer que cette série converge normalement.
2. Montrer que la somme est une fonction de classe C^1.

Exercice 4.
Soit $\sum a_n$ une série numérique absolument convergente.
1. Montrer que la série de fonctions $\sum a_n \cos(nx)$ est normalement convergente.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(nx)\, dx$$