TD 2 : Séries numériques

Exercice 1.
1. Montrer qu'une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Exercice 2.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.
1. On suppose qu'on a $u_n \leq v_n$ pour n assez grand (c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N$).
a) Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
b) Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
2. Mêmes questions si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (on note $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$) alors les séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = f(n)$ puis : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
1. Soit $n \geq 2$.
a) Montrer que : $\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq u_n \leq \int_{n-1}^n f(x)\,dx$.
b) En désuire que : $\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq u_1 + \int_1^n f(x)\,dx$.
2. Soit $\alpha > 0$.
a) Pour $n \geq 1$, calculer : $v_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.
b) Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer en fonction de α la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 4.
Donner la nature des séries suivantes :

$$a)\ \sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \quad b)\ \sum \frac{(-1)^n}{n^{3/2}+7} \quad c)\ \sum \frac{\cos(2n)}{n^3+(-1)^n} \quad d)\ \sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$e)\ \sum \tan\left(\frac{1}{n}\right) \quad f)\ \sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \quad g)\ \sum \ln\left(1+\frac{n^2-\sqrt{n}+1}{n^2+\sqrt{n}+1}\right) \quad h)\ \sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

Exercice 5.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \geq 0$.
1. On suppose que $l \in [0,1[$.
a) Montrer qu'il existe $\mu \in [0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \leq u_N \mu^{n-N}$ pour tout $n \geq N$.
b) En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Montrer que si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.
3. Que peut-on dire si $l = 1$?