TD 1 : Suites numériques

Exercice 1.
Démontrer les affirmations suivantes :
1. $1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
2. $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 2.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée, bornée :
1. $u_n = (-1)^n n$.
2. $u_n = \sin(n^3)$.
3. $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Exercice 3.
Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et en donner la limite quand elle existe :
1. $u_n = \dfrac{n^3+4n+7}{n+2+n^4}$.
2. $u_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$.
3. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
5. $u_n = 3^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 4.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n| \leq \dfrac{1}{n}$. Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 5.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera les réponses par une preuve ou un contre-exemple.
1. Une suite qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors on a : $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Si on a $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes et qu'on a $u_n \leq w_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercices supplémentaires

Exercice 6.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que :
1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$, alors : $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 + l_2$.
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$, alors : $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2$.
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors : $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 7.
1. Soit $\lambda > 0$. Etudier la convergence de la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Montrer que :

a) si $\lambda \in [0, 1[$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) si $\lambda > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3. Que peut-on dire si $\lambda = 1$?

Exercice 8.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels non nuls. On dit que ces deux suites sont équivalentes et on note : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si : $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
1. Montrer que : $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$, $n^2+n+3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ et $5n^4+3n^3+10\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 5n^4$.
2. A-t-on : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?
3. A-t-on : $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$?
4. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
5. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$, alors on a : $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n z_n$.
6. Montrer à l'aide d'un contre-exemple qu'en général on n'a pas : $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + z_n$.

Exercice 9.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera les réponses par une preuve ou un contre-exemple.
1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors on a : $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l)$.
2. Si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$
3. Si $u_n^2 + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.