TD 1

Exercice 6.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on a : $|u_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De même il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on a : $|v_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On note $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\forall n \geq N, \quad |(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| = |(u_n - l_1) + (v_n - l_2)| \leq |u_n - l_1| + |v_n -_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cela prouve que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1 + l_2$.

3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, ce qui signifie qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ pour tout $n \geq N$. Pour tout $n \geq N$ on a alors :

$$|u_n v_n| \leq |u_n|\,|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$$

et donc : $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. On a :

$$u_n v_n - l_1 l_2 = (u_n - l_1)v_n + l_1(v_n - l_2)$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée (le prouver !) et $u_n - l_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc d'après la question 3 (qui aurait du se trouver avant la question 2...), on a :

$$(u_n - l_1)v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

De même, $v_n - l_2$ tend vers 0, donc $l_1(v_n - l_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Et finalement :

$$u_n v_n - l_1 l_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ ou encore : } u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l_1 l_2$$

TD 2

Exercice 3.

1. a) On fixe $n \geq 2$. Comme f est décroissante, on a :

$$\forall x \in [n-1, n], \quad f(x) \geq f(n) = u_n$$

et donc en intégrant entre $n-1$ et n :

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \geq \int_{n-1}^{n} u_n\,dx = u_n$$

De même on a :

$$\forall x \in [n, n+1], \quad f(x) \leq f(n) = u_n$$

donc :

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} u_n\,dx = u_n$$

b) On somme ensuite les inégalités de la question 1 grâce à la relation de Chasles sur les intégrales :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

et d'autre part :

$$S_n = u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k \leq u_1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = u_1 + \int_1^{n} f(x)\,dx$$

2. a) Soit $n \neq 1$, on a :

$$v_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{-(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^n = -\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}$$

Pour $\alpha = 1$ on a :

$$v_n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^n = \ln n$$

b) Ainsi on a :

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

3. Soit $\alpha > 1$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente, donc elle est majorée (par sa limite $1/(\alpha-1)$. D'après la question 1 on a donc pour tout $n \geq 1$:

$$S_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = v_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

Ainsi la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Comme la série $\sum u_n$ est à termes positifs, cela prouve qu'elle est convergente.

Soit maintenant $\alpha \in]0,1]$. Alors on a pour tout $n \geq 1$:

$$S_n \geq u_1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx = u_1 + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et donc la série $\sum u_n$ est divergente.

Remarque : Si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est nécessairement divergente.

Exercice 4.

a) Le terme général $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ est positif et majoré par $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (cf. exercice 3), donc la série $\sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ est convergente (cf. exercice 2).

b) Le terme général n'est pas toujours positif. On regarde si la série est absolument convergente (c'est-à-dire si la série des valeurs absolues converge). On a :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+7}\right| = \frac{1}{n^2+7} \leq \frac{1}{n^2}$$

Or la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge, donc par comparaison, la série $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2+7}\right|$ converge. Ainsi la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+7}$ est absolument convergente donc convergente.

c) De même, on a : $\left|\frac{\cos(2n)}{n^3+(-1)^n}\right| \leq \frac{2}{n^3}$. Ainsi la série $\sum \frac{\cos(2n)}{n^3+(-1)^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

d) Comme la fonction cosinus est continue, on a $\cos(1/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos(0) = 1$. Or on sait qu'une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ne peut pas être convergente, donc la série $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$. On peut donc utiliser les résultats de comparaison de l'exercice 2. On a : $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$. Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (voir exercice 3), donc la série $\sum \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \geq 0$. En outre $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

g) On a :

$$\frac{n^2-\sqrt{n}+1}{n^2+\sqrt{n}+1} = \frac{1-\frac{\sqrt{n}}{n}^2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{\sqrt{n}}{n}^2+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

donc comme la fonction logarithme est continue en 2 on a :

$$\ln\left(1+\frac{n^2-\sqrt{n}+1}{n^2+\sqrt{n}+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2 \neq 0$$

Ainsi le terme général de la série ne converge pas vers 0, donc la série ne peut pas être convergente.

h) Cette dernière question était plus subtile. Tout d'abord on remarque que le terme général de la série est positif. En outre on a :

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = e^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n} = e^{-\ln n}e^{-\frac{\ln n}{n}} = \frac{1}{n}e^{-\frac{\ln n}{n}}$$

Comme $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et que la fonction exponentielle est continue, on a : $e^{-\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^0 = 1$, et donc : $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$. Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ diverge.

TD 3

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left|e^{-n^2}\sin(nx)\right| \leq e^{-n^2}$$

or la série numérique $\sum e^{-n^2}$ est convergente (on peut par exemple utiliser le critère de Cauchy 2.17), donc la série de fonctions $\sum e^{-n^2}\sin(nx)$ est normalement convergente. Cela prouve que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $S_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{-k^2}\sin(kx)$) converge uniformément et en particulier simplement.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} ke^{-k^2}\cos(kx)$$

Par le même argument, on montre que la suite des S_n' converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème 3.5, cela prouve que la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui est la somme de la série $\sum e^{-n^2}\sin(nx)$) est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\frac{d}{dx}\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n^2}\sin(nx) = \sum_{n\in\mathbb{N}} ne^{-n^2}\cos(nx)$$

Or la série de droite converge normalement, donc d'après le théorème 3.11 sa somme est continue. Ainsi la dérivée de la fonction $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n^2}\sin(nx)$ est continue, ce qui signifie que cette fonction est de classe C^1.

Attention : pour une somme finie de fonctions, la dérivée de la somme est égale à la somme des dérivées, mais ce n'est pas toujours vrai pour une somme infinie !

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|a_n \cos(nx)| \leq |a_n|$$

Par hypothèse la série numérique $\sum |a_n|$ est convergente donc la série de fonctions $\sum a_n \cos(nx)$ est normalement convergente. D'après le théorème 3.11 on a alors :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(nx)\, dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{2\pi} a_n \cos(nx)\, dx = 2\pi a_0$$

Attention : L'interversion somme-intégrale n'est pas toujours valable pour une somme infinie !