Topologie-Extréma-Intégrales

TD 5 : Intégrales.

A : Propriétés de l'intégrale

Exercice 5.1 (Positivité intégrée). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue positive. Montrer que l'application :

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.2 (Positivité stricte).

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue positive. On suppose qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) > 0$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > 0$.
2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction non nulle, continue, et telle que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)^2\,dx$.
   Montrer que $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 5.3 (C _ _ _ _ Y - S _ _ _ _ _ Z). Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues telles que $f(x)g(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que l'on a :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \times \int_0^1 g(x)\,dx \geqslant 1$$

Exercice 5.4 (Primitive d'une fonction périodique, paire, impaire.).

1. Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réels $a \leqslant b$ on a :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$$
2. Soit g une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$?
   En particulier, pour $a > 0$, que peut-on dire de : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx$?
3. Mêmes questions avec h continue et paire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.5 (Sans la moyenne on ne passe pas). Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fontion continue telle que : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ telle que $g(x_0) = x_0$.

B : Calculs d'intégrales

Exercice 5.6 (Primitives). Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto xe^{x^2}\,; \quad f_2 : x \mapsto \cos(x)\sin(x)\,; \quad f_3 : x \mapsto (\cos x)^3\,; \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

Exercice 5.7 (IPP). Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx\,; \quad B =: \int_0^1 e^x \cos(x)\,dx$$

Exercice 5.8. Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx\,; \quad B = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Exercice 5.9 (Exercice de l'examen de décembre 2006). Pour tout entier n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$.

1. (a) Démontrer que les nombres I_n sont positifs et que la suite (I_n) est décroissante.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n > 0$, on a :
   $$\frac{n}{n+1}\left((n+1)I_{n+1}I_n\right) \leqslant nI_n^2 \leqslant nI_nI_{n-1}$$
2. (a) En remarquant que $\sin^n x = \sin x \sin^{n-1} x$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
   (b) En déduire que la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $A_n = nI_nI_{n-1}$ est constante, et déterminer cette constante.
3. Déduire des questions précédentes que la suite (B_n) définie par $B_n = I_n\sqrt{n}$ est convergente, et calculer sa limite.

C : Intégrales généralisées

Exercice 5.10. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet une limite en $+\infty$ et que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente. Que peut-on dire de la limite de f en $+\infty$?

Exercice 5.11 (Riemann et Bertrand).

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier selon la valeur de α la convergence des intégrales : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}dx$.

Exercice 5.12. Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt\,; \quad \int_0^\infty t^5 e^{-t}\,dt\,; \quad \int_1^\infty \frac{\sin^2(\sqrt{t})}{e^{-t}+t^2}dt\,; \quad \int_1^\infty \frac{1}{1+e^{-\sqrt{t}}}\,dt$$

Exercice 5.13 (Exercice de l'examen de janvier 2005). On considère une fonction continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ qui est strictement positive, et on suppose que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ est convergente.

1. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_t^\infty f(x)\,dx$ est aussi convergente, et que l'on a : $\displaystyle\int_t^\infty f(x)\,dx = I - \int_0^t f(x)\,dx$.
2. On définit une fonction $G : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ en posant $G(t) = \displaystyle\int_t^\infty f(x)\,dx$. Utiliser la question précédente pour montrer que :
   (a) L'on a $G(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$.
   (b) La fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on calculera.
   (c) La fonction G est dérivable ; calculer sa dérivée.
3. En déduire que l'intégrale généralisée :

$$J = \int_0^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{\int_t^\infty f(x)\,dx}}dt$$

   est aussi convergente, et calculer J en fonction de I.