Topologie-Extrema-Intégrales

TD 2 : Topologie du plan. Fonctions de deux variables.

Exercice 2.1 (Boules carrées). Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note : $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ et $\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|\}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2\,\|x\|_\infty$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne (qu'on note également $\|\cdot\|_2$).

3. Dessiner les boules unités fermées (*ie.* l'ensemble des points de normes inférieures ou égales à 1) pour $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 2.2 (Une fonction facile pour commencer). Montrer que l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \right.$$

est continue.

Exercice 2.3 (Applications lipschitziennes). On dit que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne s'il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,\|x - y\|$$

1. Les applications suivantes sont-elles lipschitziennes :
   a. $x \mapsto \|x - a\|$ où $a \in \mathbb{R}^2$ est fixé ?
   b. $x \mapsto \|x\|^2$?
   c. $(x_1, x_2) \mapsto x_1$, la projection sur l'axe des abscisses ?
2. Montrer qu'une application lipschitzienne est continue. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.4 (Calculs de limites, Acte III).

1. Calculer la limite de :
   a. $(3x\cos(y^2), \sin(1 + xy))$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.
   b. $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.
2. On considère $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on note $g(y) = \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$. Etudier la limite de g en 0. De même, étudier la limite quand $x \to 0$ de $h(x) = \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$. Peut-on en déduire que f admet une limite en $(0, 0)$?

Exercice 2.5 (Et ça continue !). Étudier la continuité des applications suivantes :

a. $f : (x, y) \mapsto x^3 - 4y^2 + 3x + 1.$

b. $g : (x, y) \mapsto (|x - \cos(y)|, 4).$

c. $h : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d. $n : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}.$

Exercice 2.6 (Ouverts et Fermés). 1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

$$A = \mathbb{R},\ B = [0, 1],\ C =]0, 1[,\ D = [0, +\infty[,\ E = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\},\ F = \mathbb{Q}$$

2. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ?
Un point, une droite, la réunion de deux droites, le complémentaire d'une droite, $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x^2 + 2y^2 \leqslant 1\}$, $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(x^2 - y^3) \geqslant 0 \text{ et } x - y = 0\}$.

Exercice 2.7 (Cette intersection d'ouverts tombe à point (fermé)). On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'une distance d. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on note $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(x, y) < r\}$, $\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(x, y) \leqslant r\}$ et $S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(x, y) = r\}$.

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, $B(x, r)$ est ouvert, tandis que $\overline{B}(x, r)$ et $S(x, r)$ sont fermés.
2. A quoi sont égaux les ensembles :

a. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B}\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$

b. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B\left(0, \frac{1}{n}\right)$

c. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\overline{B}(0, 1) \setminus \overline{B}\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)\right).$

d. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(B(0, 1) \setminus B\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)\right).$

Exercice 2.8 (Distance à un ensemble). Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et d une distance sur $\mathbb{R}^2$

1. Montrer que A est fermée si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers un point $u \in \mathbb{R}^2$ on a : $u \in A$.
2. On suppose que A est non vide et on pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \delta(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$
On suppose que A est fermée. Montrer que :
$$\forall x \in A, \quad x \in A \Longleftrightarrow \delta(x, A) = 0$$
3. Si B est une partie de $\mathbb{R}^2$, on note :
$$\delta(B, A) = \inf_{x \in B} \delta(x, A)$$
   a. Montrer que $\delta(A, B) = \delta(B, A)$.
   b. Montrer qu'on peut avoir $A \cap B = \emptyset$ et $\delta(A, B) = 0$.
   c. Montrer que c'est encore possible si on suppose de plus que A et B sont fermées.
   d. On rappelle (ou on admet) que si A est fermée et bornée, alors toute suite à valeurs dans A admet une suite extraite convergente. Montrer alors que si A est fermée bornée, que B et fermée et $A \cap B = \emptyset$, alors $\delta(A, B) > 0$.