Topologie-Extrema-Intégrales

Correction du Contrôle Continu n°1

À rendre avant le mardi 20 novembre

Exercice 1.

1. On considère la fonction : $f : (x,y) \mapsto \dfrac{2+e^{xy}}{2+\sin(1+x^2)}$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) En déduire la limite de f quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

c) Retrouver directement ce résultat en utilisant les résultats concernant les sommes, produits, quotients et compositions de limites.

d) Et puisque beaucoup parmi vous ont répondu en calculant $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$, j'ajoute : donner un exemple de fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\tilde{f}(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\tilde{f}(x,y)\right) = 0$$

mais telle que $\tilde{f}(x,y)$ ne tend pas vers 0 quand (x,y) tend vers 0.

2. On considère l'application : $g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |g(x,y)| \leqslant |x|$.

c) En déduire que g est continue en (0,0).

3. On considère l'application : $h : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

En considérant la suite $\left(\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que h n'est pas continue en (0,0).

Exercice 2.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on a :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \quad \Longleftrightarrow \quad \left(u_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l\right)$$

(Traitez séparément les deux implications. On échappe difficilement à un raisonnement « avec des ε », faîtes bien attention à ce que vous écrivez (en particulier il faut que cela ait un sens)).

Exercice 3.
Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on note :

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-y\| < r\} \quad \text{et} \quad \overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-y\| \leqslant r\}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Pour F fermé de $\mathbb{R}^2$ et ε réel strictement positif, on note : $\mathcal{O}_\varepsilon(F) = \bigcup\limits_{a\in F} B(a,\varepsilon)$.

1. a) Pour tout $\varepsilon > 0$, déterminer $\mathcal{O}_\varepsilon(\{(0,0)\})$

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\mathcal{O}_\varepsilon(\overline{B}((0,0),1)) = B((0,0),1+\varepsilon)$ (un dessin est très apprécié pour ce genre de question mais ne suffit pas à démontrer le résultat).

2. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que pour tous $\varepsilon > 0$ et $a \in F$, $B(a,\varepsilon)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{O}_\varepsilon(F)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.