Université de Nantes | Département de Mathématiques
Année 2007/2008 | Module S3M05

Topologie-Extrema-Intégrales

Contrôle Continu n°1 - 06 novembre 2007

1h20 - Documents interdits

Exercice 1.

1. Étudier la limite en $(0,0)$ de la fonction : $f:(x,y)\mapsto \dfrac{2+e^{xy}}{2+\sin(1+x^2)}$.

2. Étudier la continuité des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

a) $g:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(indication : on pourra par exemple démontrer et utiliser le fait que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|g(x,y)|\leqslant |x|$)

b) $h:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Exercice 2.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l\in\mathbb{R}$. Montrer que l'on a :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \iff \left(u_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l\right)$$

2. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non convergente telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Exercice 3.

Pour $x\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$, on note :

$$B(x,r)=\left\{y\in\mathbb{R}^2 \mid \|x-y\|<r\right\} \quad \text{et} \quad \overline{B}(x,r)=\left\{y\in\mathbb{R}^2 \mid \|x-y\|\leqslant r\right\}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

Pour F fermé de $\mathbb{R}^2$ et ε réel strictement positif, on note : $\mathcal{O}_\varepsilon(F)=\bigcup_{a\in F} B(a,\varepsilon)$.

1. Pour tout $\varepsilon>0$, déterminer $\mathcal{O}_\varepsilon(\{(0,0)\})$ et $\mathcal{O}_\varepsilon(\overline{B}((0,0),1))$.

2. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, $\mathcal{O}_\varepsilon(F)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(F)=F$

4. Soient F_1 et F_2 deux fermés de $\mathbb{R}^2$ tels que : $\inf\{\|x-y\| \mid x\in F_1, y\in F_2\}>0$.

Montrer qu'il existe $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ tels que $F_1\subset\mathcal{W}_1$, $F_2\subset\mathcal{W}_2$ et $\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2=\emptyset$.