Devoir à rendre la première séance de la semaine du 12 novembre

Il est fortement conseillé de traiter les différentes parties du devoir dans l'ordre. Les parties I, II et III sont obligatoires, et les parties IV et V facultatives.

I - Fonction arctan

On définit la fonction arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme la réciproque de la fonction $\tan\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

1. Dessiner le graphe de la fonction $\tan x$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, puis le graphe de la fonction $\arctan x$ sur $\mathbb{R}$. Justifier en une phrase le choix de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans la définition de arctan.

2. Donner un exemple d'un réel x tel que $\arctan(\tan x) \neq x$, puis donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que $\arctan(\tan x) = x$.

3. Justifier pourquoi la formule $\tan(\arctan x) = x$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en déduire une expression de la dérivée de $\arctan x$. (On pourra commencer par rappeler les expressions des dérivées $(\tan x)'$ et $(f \circ g)'$).

4. Calculer la dérivée de $\arctan(\frac{1}{x})$, et en déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = c$ pour une constante c que l'on déterminera. Que dire de la fonction $x \mapsto \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$?

II - Formule de Machin

John Machin (1680-1751) est un mathématicien anglais connu pour avoir calculé, en 1706, 100 décimales du nombre π grâce à la formule que nous allons obtenir dans cette partie.

1. On admet ici les formules trigonométriques (on les montrera dans la partie V):

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a.$$

   En déduire la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

2. Posons $u = \arctan(\frac{1}{5})$. Déduire de la formule précédente que

$$\tan 2u = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad \tan 4u = \frac{120}{119}.$$

3. Posons $v = 4u - \frac{\pi}{4}$. Montrer que $\tan v = \dfrac{1}{239}$.

4. Estimer la valeur de v à l'aide d'une calculatrice, puis établir la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

   (Question facultative: comment faire sans calculatrice ?)

III - Développement limité de $\arctan x$

1. Soit $n \geq 1$ un entier, et $x \in]-1, 1[$. Donner une expression simple pour le produit
$$(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$$
2. En déduire les développements limités en 0 :
$$\frac{1}{1-x} = 1+x+\cdots+x^n+\mathrm{o}(x^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\mathrm{o}(x^{2n})$$
3. Si $g \colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0, et $g(0) = 0$, montrer que pour tout $x > 0$ dans I il existe $c \in]0, x[$ tel que $g(x) = xg'(c)$.
4. Soit I un intervalle contenant 0, et $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable. Supposons que la dérivée $f'(x)$ admet un développement limité en 0 de la forme
$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$
Montrer que $f(x)$ admet un développement limité de la forme
$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \mathrm{o}(x^{n+1})$$
(Indication: on pourra appliquer la question précédente à la fonction $g(x) = f(x) - f(0) - (a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1})$).
5. En déduire le développement limité à l'ordre n en 0 de $\arctan x$.

IV - Approximation de π

On admet que pour tout réel $x \in]-1, 1[$, le développement limité à l'ordre n de $\arctan x$ en 0 tend vers $\arctan x$ quand n tend vers ∞. Dans toute cette partie il faut s'aider d'une calculatrice ou d'un ordinateur : on conseille une console python, qui permet de manipuler des fractions après avoir effectué `from fractions import Fraction`.

1. Calculer les développements limités de $\arctan \frac{1}{5}$ et $\arctan \frac{1}{239}$ à l'ordre $n = 1$, 3 et 5 obtenus en III-4, et en déduire des approximation de π à l'aide de II-4.
2. Combien de chiffres après la virgule sont corrects dans chaque cas ? On rappelle les premières décimales de π : 3.141592653589793238462643383279...
3. A quel ordre n John Machin a-t-il dû calculer (à la main !) les approximations pour obtenir 100 décimales de π correctes ?

V - Formules d'addition trigonométriques

1. Si R_θ est la rotation du plan euclidien de centre $(0, 0)$ et d'angle θ, et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer les coordonnées des points $R_\theta(x, 0)$, $R_\theta(0, y)$ et $R_\theta(x, y)$, images respectives de $(x, 0)$, $(0, y)$ et (x, y) par la rotation R_θ. Placer tous ces points sur un dessin.
2. Si $a, b \in \mathbb{R}$, exprimer l'image du point $(1, 0)$ par la rotation R_a, puis l'image de ce point $R_a(1, 0)$ par la rotation R_b.
3. Justifier l'égalité $R_{a+b} = R_b \circ R_a$, et en déduire les formules pour $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ utilisées en II-1.

Corrigé

I - Fonction arctan

1. La fonction $x \mapsto \tan x$ est bijective de l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}$, on peut donc considérer la bijection réciproque qui va être une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\pi/2, \pi/2[$.

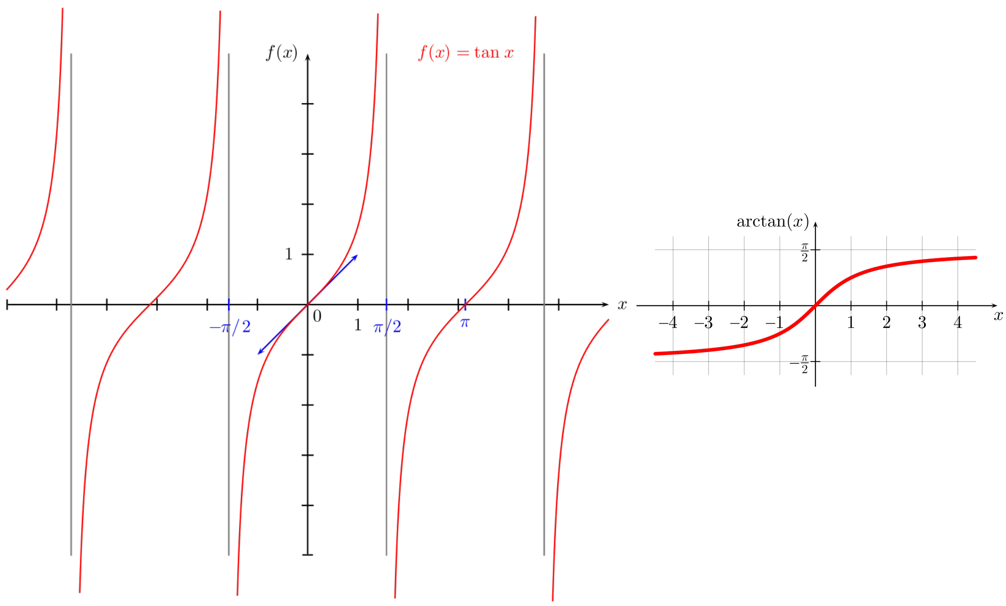

Figure 1: Les graphes de $\tan x$ et $\arctan x$ (source: Wikipedia)

2. Par exemple $x = \pi$ convient. On a $\tan \pi = 0$, mais $\arctan(0) = 0 \neq \pi$. La condition nécessaire est suffisante pour que $\arctan(\tan x) = x$ est $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

3. Étant donné $x \in \mathbb{R}$, par définition $y = \arctan x$ est l'unique réel dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan y = x$. Calculons la dérivée. Tout d'abord comme $\tan x = \sin x / \cos x$, on a

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Par ailleurs si $f \circ g$ est une composition de fonction dérivable alors

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

En appliquant cette formule à $f = \tan$ et $g = \arctan$ on en déduit

$$1 = (x)' = \tan(\arctan x) = (1 + \tan^2(\arctan x)) \cdot (\arctan x)' = (1 + x^2)) \cdot (\arctan x)',$$

et finalement

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. A nouveau par la formule donnant $(f \circ g)'$ on a, pour tout $x \neq 0$:

$$(\arctan(\frac{1}{x}))' = \frac{1}{1+(1/x)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{1+x^2} = -(\arctan x)'.$$

Ainsi la fonction $x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$, et donc est constante sur tout intervalle où elle est définie. En particulier elle est constante sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

Comme $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, on a $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, et donc la fonction $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ prend la valeur $c = \pi/2$ en $x = 1$, et donc également sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$.

De même on calcule $\tan \frac{-\pi}{4} = -1$, d'où la fonction $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ prend la valeur $-\pi/2$ en $x = -1$, et donc également sur tout l'intervalle $]-\infty, 0[$.

II - Formule de Machin

1. A partir des formules

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a.$$

on obtient (diviser par $\cos a \cos b$ en haut et en bas pour la dernière égalité) :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \tag{1}$$

$$= \frac{\cos a \sin b + \cos b \sin a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \tag{2}$$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \tag{3}$$

2. Posons $u = \arctan(\frac{1}{5})$. Ainsi u est l'unique réel dans $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan u = \frac{1}{5}$. La formule de la question 1 implique

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} = \frac{2/5}{24/25} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4u = \frac{2 \tan 2u}{1 - \tan^2 2u} = \frac{10/12}{119/144} = \frac{120}{119}$$

3. Posons $v = 4u - \frac{\pi}{4}$. Remarquons que $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, et que $\tan(-x) = -\tan x$ pour tout x où la fonction tan est définie. La formule de la question 1 donne alors

$$\tan v = \frac{\tan 4u - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4u \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1/119}{239/119} = \frac{1}{239}.$$

4. Par définition on a $\frac{\pi}{4} = 4u - v = 4 \arctan \frac{1}{5} - v$, il s'agit donc de montrer $v = \arctan \frac{1}{239}$. Comme

$$\tan v = \frac{1}{239} = \tan(\arctan \frac{1}{239}),$$

il suffit de montrer que $v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, car v et $\frac{1}{239}$ seront alors deux nombres dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ admettant la même tangente, donc égaux.

Une estimation à l'aide d'une calculatrice donne $v \simeq 0.004$, donc on a bien $v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et on conclut $v = \frac{1}{239}$.

III - Développement limité de $\arctan x$

1. Soit $n \geq 1$ un entier. En développant on obtient
$$(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = x^{n+1}-1$$

2. De la formule précédente on déduit, pour tout $x \neq 1$:
$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{x^{n+1}}{x-1} + \frac{1}{1-x}.$$
Mais $\frac{x^{n+1}}{x-1} = x^n \frac{x}{x-1} = \mathrm{o}(x^n)$, d'où
$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\mathrm{o}(x^n)$$
En substituant x par $-x^2$, on obtient
$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\mathrm{o}(x^{2n})$$

3. Si $g\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0, et $g(0)=0$, le théorème des accroissements finis appliquée à la fonction g sur l'intervalle $[0,x]$ donne l'existence d'un $c \in]0,x[$ tel que
$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(c)$$
d'où $g(x) = xg'(c)$ puisque on suppose $g(0)=0$.

4. Posons $g(x) = f(x) - f(0) - (a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1})$, il s'agit de montrer que $g(x) = \mathrm{o}(x^{n+1})$. On calcule la dérivée :
$$g'(x) = f'(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) = x^n \varepsilon(x)$$
avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, par hypothèse. Par la question précédente pour tout $x > 0$ proche de 0 on a
$$g(x) = xg'(c(x))$$
pour un certain $c(x) \in]0,x[$. Donc $g(x) = xc(x)^n \varepsilon(c(x))$, et comme $\lim_{x\to 0} c(x) = 0$ (théorème des gendarmes) et $\frac{c(x)}{x} \in [0,1]$, on en déduit
$$g(x) = x^{n+1}\frac{c^n}{x^n}\varepsilon(c(x)) = \mathrm{o}(x^{n+1})$$
car $\lim_{x\to 0} \frac{c(x)^n}{x^n}\varepsilon(c(x)) = 0$

5. On déduit de la question précédente le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de $\arctan x$, en intégrant terme à terme le développement limité de $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre $2n$ obtenu à la question 2, et en remarquant que $\arctan 0 = 0$:
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1}).$$

IV - Approximation de π

1. On utilise la formule $\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}$ obtenue en III-4, et on en déduit des approximations de π en approchant les termes en arctan par un développement limité à l'ordre n.

   A l'ordre $n = 1$:
$$\pi \simeq 16\frac{1}{5} - 4\frac{1}{239} = \frac{3804}{1195} \simeq 3.18326.$$
   A l'ordre $n = 3$:
$$\pi \simeq 16(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3}) - 4(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3}) = \frac{5359397032}{1706489875} \simeq 3.1405970293.$$
   A l'ordre $n = 5$:
$$\begin{aligned}\pi &\simeq 16(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5}) - 4(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5}) \\ &= \frac{38279241713339684}{12184551018734375} \simeq 3.141621\end{aligned}$$

2. En comparant avec les premières décimales de $\pi = 3.14159265358979323846264338327 9...$, on voit qu'on a obtenu :
   - 1 décimale correcte à l'ordre $n = 1$,
   - 2 décimales correctes à l'ordre $n = 3$,
   - 3 décimales correctes à l'ordre $n = 5$.

3. Avec un petit script python qui teste les approximations une par une, et en remarquant que les approximations oscillent successivement au dessus et au dessous de π, on trouve $n = 139$.

   Un exemple de script:

```
from fractions import Fraction
import math

def arctan(x, n):
    result = x
    k = 1
    sign = 1
    while k <= n:
        k += 2
        sign *= -1
        result += sign * x**k / k
    return result

def pi_par_machin(n):
    return 4*(4*arctan(Fraction(1,5), n) - arctan(Fraction(1,239), n))

delta = Fraction(1,10**100)

n = 1
while abs(pi_par_machin(n+2) - pi_par_machin(n))  > delta:
    n += 2
    print(n)
```

V - Formules d'addition trigonométriques

1. Si R_θ est la rotation du plan euclidien de centre O et d'angle θ, et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$R_\theta(x,0) = (x\cos\theta, x\sin\theta)$$
$$R_\theta(0,y) = (-y\sin\theta, y\cos\theta)$$
d'où
$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

2. Si $a, b \in \mathbb{R}$, par la question précédente on a
$$R_a(1,0) = (\cos a, \sin a)$$
et
$$R_b(R_a(1,0)) = (\cos a\cos b - \sin b\sin a, \cos a\sin b + \sin a\cos b).$$

3. Effectuer la rotation d'angle a puis la rotation d'angle b revient à effectuer la rotation d'angle $a+b$, ainsi $R_{a+b} = R_b \circ R_a$. D'une part
$$R_{a+b}(1,0) = (\cos(a+b), \sin(a+b))$$
et en identifiant avec la formule pour $R_b(R_a(1,0))$ trouvée à la question précédente, on conclut
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos a\sin b + \cos b\sin a.$$