UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL
NOTES DE COURS POUR "ANALYSE HILBERTIENNE"

JASMIN RAISSY ET PASCAL J. THOMAS

Avertissement. Ces notes donnent un résumé de cours concernant les séries de Fourier, la transformée de Fourier et un certain nombre de sujets liés. Toutes les démonstrations ne sont pas nécessairement données. Certains théorèmes importants sont admis.

Contents

1. Pré-requis

1.1. **Dérivées et intégrales de fonctions à valeurs complexes.** On rappelle que pour un nombre complexe $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z} := x - iy$, $|z|^2 := z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors on écrit $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, où $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}$, et on définit (quand f_1 et f_2 sont intégrables, resp. dérivables)

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f_1(x)dx + i\int_a^b f_2(x)dx,$$

et

$$f'(x) := f_1'(x) + if_2'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Les formules habituelles (dérivations d'une somme, d'un produit, de $1/f$, théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, intégrale d'une somme, intégration par parties, changement de variable...) sont valables dans ce cadre.

Nous avons un problème pour la dérivée d'une fonction composée $g \circ f$: il faut désormais que g soit une fonction à variable complexe, et que signifie sa dérivée dans ce cas ? Nous renvoyons au cours de fonctions holomorphes pour une étude de cette question.

Toutefois, les formules sur les produits nous permettent de voir que $\frac{d}{dx}(f(x))^n = nf'(x)(f(x))^{n-1}$, comme d'habitude. Un autre cas particulier très important est celui de $e^{f(x)}$.

1.2. **Exponentielle complexe.** On définit la fonction e^z comme l'unique fonction telle que $e^0 = 1$, $e^{z+w} = e^z e^w$, et $\lim_{z\to 0}(e^z - 1)/z = 1$. Nous admettrons l'unicité. L'existence découle de

Théorème 1.1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Des propriétés définissantes de l'exponentielle, on déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^z(e^h - 1)}{h} = e^z,$$

donc l'exponentielle est dérivable au sens complexe et on peut montrer facilement que $(e^f)' = f'e^f$.

On remarque que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, et donc $|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions trigonométriques par

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

et on voit que quand $z \in \mathbb{R}$ on a bien les propriétés des fonctions trigonométriques usuelles. Attention ! Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

1.3. **Intégrales impropres.** Ce sujet a été traité dans le cours d'Intégration du S3.

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. On pose, si la limite existe dans $\mathbb{R}$,

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(t)dt.$$

On dira que f est *intégrable* sur $[a, +\infty[$ si la limite existe (et donc est finie). On dira (parfois) que f est *absolument intégrable* si $|f|$ est intégrable. L'intégrabilité absolue implique l'intégrabilité, et la réciproque est fausse. On pose des définitions analogues pour $\int_{-\infty}^a f(t)dt$.

On dira que f est intégrable sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ si f est à la fois intégrable sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a]$ (on prend souvent $a = 0$, parfois on découpe en plusieurs intervalles : les intervalles bornés ne posent pas de problème).

Remarque 1.2. Attention, le fait que f soit intégrable sur $\mathbb{R}$ implique que la limite $\lim_{A\to+\infty} \int_a -A^A f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$, mais la réciproque est fausse en général. Les deux propriétés ne sont équivalentes que pour l'absolue intégrabilité (*exercice*).

Exemples : $f_1(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Remarque 1.3. Attention ! Si f tend vers une limite à l'infini et est intégrable, cette limite doit être 0. Mais il existe des fonctions intégrables qui n'ont pas de limite à l'infini.

Propriétés : on obtient en passant à la limite les propriétés habituelles de changement de variables et d'intégration par parties. Attention aux bornes ! Il vaut mieux refaire le processus de limite si on n'est pas sûr du résultat.

Nous allons souvent utiliser le résultat suivant, qui a été vu par les étudiants de l'option mathématiques et que les physiciens devront admettre :

Théorème 1.4 (Dérivation sous l'intégrale). *Soit $(x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction sur $I \times J$ (I, J intervalles), continue par morceaux en x et intégrable sur I pour t fixé ; continument* *dérivable en t pour x fixé. On suppose qu'il existe une fonction $g\colon I \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur I, telle que pour tout $t \in J$, $x \in I$, $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leq g(x)$. Alors*

$$\frac{d}{dt}\int_I f(x,t)dx = \int_I \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx.$$

Remarque 1.5. Si I et J sont fermés et bornés et $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ continue, elle est bornée par une constante et le théorème s'applique facilement. Sauf que nous aurons besoin de l'appliquer sur des intervalles I non-bornés, notamment la droite réelle.

2. Séries de Fourier, définition et premières propriétés

Étant donné une fonction f 2π-périodique, c'est-à-dire périodique de période 2π, on se voudrait la représenter comme limite d'une somme de fonctions 2π-périodiques élémentaires, en analogie avec le séries entières.

Définition 2.1. Un *polynôme trigonométrique* est une combinaison linéaire (finie) à coéfficients réels de fonctions $\cos(jx)$ et $\sin(jx)$, c'est-à-dire

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n}(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)), \tag{1}$$

avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.2. Un polynôme trigonométrique est bien une fonction continue et 2π-périodique, comme c'est une somme finie de fonctions continues et 2π-périodiques et que les fréquences sont entières.

On peut toujours exprimer (1) en notation complexe, à l'aide des fonctions $e_j(x) := e^{ijx}$, comme

$$P(x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijx}, \tag{2}$$

où $c_j \in \mathbb{C}$ vérifient

$$a_j = c_j + c_{-j} \text{ pour tout } j \geq 0 \tag{3}$$

et

$$b_j = i(c_j - c_{-j}) \text{ pour tout } j > 0. \tag{4}$$

Exercice 2.3. Montrer (3) et (4) et trouver une expression pour les c_j à partir des coéfficients a_j, b_j.

La notation complexe va être particulièrement utile, grâce au résultat suivant.

Lemme 2.4. *Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 \ \textit{si} \ n = m \\ 0 \ \textit{si} \ n \neq m. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\ell x}dx = \begin{cases} 1 \text{ si } \ell = 0 \\ 0 \text{ si } \ell \neq 0. \end{cases}$$

En effet, on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = 1$$
et, pour $\ell \neq 0$,
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{i\ell x}dx &= \int_0^{2\pi}\cos(\ell x)dx + i\int_0^{2\pi}\sin(\ell x)dx \\ &= \left[\frac{\sin(\ell x)}{\ell}\right]_0^{2\pi} + i\left[\frac{-\cos(\ell x)}{\ell}\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$
□

Si on considère donc l'espace de fonctions $V_n := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_j(x) = e^{ijx}, -n \leq j \leq n\}$, qui est un espace vectoriel complexe de dimension $2n+1$, on a que $(e^{ijx})_{-n\leq j\leq n}$ en est une base orthonormée pour le produit hermitien
$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$
Comme conséquence on a que P est un polynôme trigonométrique si et seulement si $P \in V_n$ et les coefficients de P seront $c_j = \langle P, e_j\rangle$, $-n \leq j \leq n$.

Maintenant nous pouvons donc considérer la définition suivante

Définition 2.5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. Pour $n \in \mathbb{Z}$, l'*n-ième coefficient complexe de Fourier de f* est
$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \langle f, e_n\rangle.$$

Remarque 2.6. On a donc que
$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt, et$$
grâce à la périodicité de f et e_n on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(t)e^{-int}dt$$
pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. On a :*

(1) *$c_{-n}(\bar{f}) = \overline{c_n(f)}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$;*
(2) *si $g(t) = f(-t)$ alors $c_n(g) = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et en particulier si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire on a $c_{-n}(f) = c_n(f)$, et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire on a $c_{-n}(f) = -c_n(f)$;*
(3) *si $a \in \mathbb{R}$ et $g(t) = f(t+a)$ alors $c_n(g) = e^{ina}c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;*
(4) *si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et en particulier si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. (1) On a

$$c_{-n}(\bar{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)e^{-int}} dt = \overline{c_n(f)}.$$

(2) En utilisant le changement de variable $u = -t$ on a

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-t)e^{-int}dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi} f(u)e^{inu}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)e^{inu}du = c_{-n}(f). \end{aligned}$$

(3) En utilisant le changement de variable $u = t + a$ on a

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t+a)e^{-int}dt \quad = \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}e^{ina}du = e^{ina}c_n(f).$$

(4) En intégrant par parties on a

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}[f(t)e^{-int}]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(-in)e^{-int}dt = inc_n(f). \end{aligned}$$

□

En utilisant les coefficients de Fourier, nous pouvons associer à toute fonction 2π-périodique des polynômes trigonométriques et une série trigonométrique, à priori définie seulement formellement.

Définition 2.8. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'*N-ième somme partielle de Fourier de f* est la fonction

$$S_n(f)(t) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int},$$

où $c_n(f)$ est l'n-ième coefficient de Fourier de f.

La *série de Fourier associée à f* est

$$S(f)(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}.$$

Remarque 2.9. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique, on a

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n(f)\sin(nt),$$

avec

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \text{ et } b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)),$$

et nous pouvons donc définir

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \text{ pour } n \geq 0,$$

et

$$b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \text{ pour } n > 0.$$

On remarque que f est paire si et seulement si tous les $b_n(f)$ sont nuls, et f est impaire si et seulement si tous les $a_n(f)$ sont nuls.

2.1. **Convergence d'une série de Fourier.** On remarque que, pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique, on a

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|dt$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f est bornée.

Étant donné une suite bornée de nombres complexes $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nous voulons déterminer quand la suite des sommes partielles $S_n(t) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ est convergente et, si c'est le cas, quand les c_n sont les coefficients de Fourier de la fonction limite.

Théorème 2.10 (Admis)**.** *Soit f une fonction 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, intégrable sur une période et telle que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $f(x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ où f est continue.*

On a donc le corollaire immédiat suivant.

Corollaire 2.11. *Soit f une fonction continue 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $f = 0$.*

Ainsi que :

Corollaire 2.12. *Soit f une fonction continue 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que la série de Fourier de f soit absolument convergente, c'est-à-dire $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$. Alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f, c'est-à-dire*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x) \text{ uniformément en } x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On rappelle que si une suite de fonctions continue converge uniformément vers une fonction limite, alors la limite est continue. On note que l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$ implique que la suite des sommes partielles de Fourier de f converge absolument et uniformément vers une fonction continue et 2π-périodique g définie par

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}.$$

De plus, les coefficients de Fourier de g sont précisement les $c_n(f)$ donc on peut changer la somme avec l'intégrale (grâce à l'uniforme convergence de la série). En applicant donc le corollaire précedent à la fonction $f-g$ on obtient $f=g$, et donc la thèse. $\square$

On remarque que la preuve précedent montre en fait le résultat suivant :

Proposition 2.13. *Soit $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ une suite telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$. Alors la suite de fonctions $\{S_N(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$ définie par $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une limite f. De plus, la limite est continue et $c_n(f) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si la suite des dérivées $\sum_{n=-N}^{N} inc_n e^{inx}$ converge uniformément vers une limite g, alors la suite $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ converge uniformément vers une limite f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.*

Remarque 2.14. Nous avons vu en TD que la série de Fourie de la fonction

$$f = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in (0,\pi] \\ 0 \text{ si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

et prolongée par 2π-périodicité est

$$S(f)(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2k+1} e^{(2k+1)ix} - \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)ix} \right),$$

et on a donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = +\infty$. Donc dans ce cas nous n'avons pas une série convergente. Mais attention ! Il se peut aussi que f soit continue et que sa série de Fourier ne converge pas.

Il est donc naturel de se demander quelles hypothèses sur f assurent la convergence de la série de Fourier. Il se trouve que la régularité de f est directement liée au comportement asymptotique de la suite $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. On rappelle qu'on note $f(x) = O(g(x))$ pour $x \to a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ pour $x \to a$, et en particulier $f(x) = O(1)$ signifie que f est bornée.

Corollaire 2.15. *Soit f une fonction 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors*

$$c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ pour } |n| \to \infty,$$

et donc la série de Fourier de f converge absolument et uniformément vers f.

Démonstration. En intégrant par parties deux fois, pour $n \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi in}\left[f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi(in)^2}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}dt \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}dt,
\end{aligned}$$

car le quantités dans les parenthèses carrées s'annullent vu que f et f' sont 2π-périodiques. On a donc

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi n^2}\left|\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{2\pi} |f''(t)|dt \leq \frac{C}{n^2},$$

où $C = \max_{t\in[0,2\pi]} |f''(t)|$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente on obtient la thèse. □

Remarque 2.16. La même preuve nous montre que : *Si f est une fonction 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 2$, alors*

$$c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ pour } |n| \to \infty,$$

et donc la série de Fourier de f converge absolument et uniformément vers f. De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ pour $|n| \to \infty$ pour tout k.

2.2. **Produit de convolution.** On remarque que pour toute fonction f 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right)e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_N(x-t)dt,
\end{aligned}$$

où $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}$. Ceci nous amène naturellement à la notion suivante.

Définition 2.17. Soit f et g deux fonctions continues 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le *produit de convolution de f par g* est la fonction

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Proposition 2.18. *Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ des fonctions continues et 2π-périodiques. Alors :*

(1) $f * (g+h) = f * g + f * h$.
(2) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ *pour tout* $c \in \mathbb{C}$.
(3) $f * g = g * f$.
(4) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
(5) $f * g$ *est continue et* 2π*-périodique.*
(6) $f * e_n = c_n(f)e_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, *où* $e_n(x) = e^{inx}$.
(7) $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

Démonstration. Voir TD. □

Corollaire 2.19. *Si $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ est un polynôme trigonométrique, alors $f * P$ est également un polynôme trigonométrique.*

Nous voudrions déterminer quand une fonction 2π-périodique continue est la limite uniforme de sa série de Fourier ou au moins d'une suite de polynômes trigonométriques. Nous allons avoir besoin d'introduire un autre objet.

2.3. **Unités approchées.**

Définition 2.20. Une *unité approchée de fonctions 2π-périodiques continues sur* $\mathbb{R}$ est une suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives ($h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$), 2π-périodiques continues sur $\mathbb{R}$ telles que

(1) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_n(t)dt = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(2) pour tout $0 < \delta < \pi$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta \le |x| \le \pi} h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} h_n(x)dx = 0.$$

On note que (2) est équivalent à dire que pour tout $0 < \delta < \pi$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_{\varepsilon,\delta} > 0$ tel que $0 \le h_n(x) \le \varepsilon$ pour tout $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ et tout $n \ge N_{\varepsilon,\delta}$.

Exemple 2.21. La suite $\{h_N\}_{N\ge 0}$, définie par

$$h_N(t) := \frac{1}{A_N} \cos^{2N} \frac{t}{2} \text{ avec } A_N := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi} \pi \cos^{2N} \frac{t}{2} dt$$

est une unité approchée (voir TD).

Remarque 2.22. D'après la feuille de TD 1 on a que les noyaux de Dirichlet $\{D_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ ne sont pas une unité approchée.

Proposition 2.23. *Soit f une fonction continue 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une unité approchée. Alors la suite $\{f*h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon>0$ il existe $n_\varepsilon>0$ tel que $|f*h_n-f|\leq\varepsilon$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n\geq n_\varepsilon$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Comme f est continue et 2π-périodique, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit donc $\delta>0$ tel que pour tout $y\in\mathbb{R}$ tel que $|y|<\delta$ on a $|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|(f*h_n)(x)-f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_n(y)f(x-y)dy-\frac{f(x)}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_n(y)dy\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_n(y)(f(x-y)-f(x))dy\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_n(y)|f(x-y)-f(x)|dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta}h_n(y)|f(x-y)-f(x)|dy \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}h_n(y)|f(x-y)-f(x)|dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|y|<\delta}h_n(y)dy+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}h_n(y)|f(x-y)-f(x)|dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h_n(y)dy+\frac{2M}{2\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}h_n(y)dy,
\end{aligned}$$

où $M=\max_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|$ et nous avons utilisé $|f(x-y)-f(x)|\leq|f(x-y)|+|f(x)|\leq 2M$. Or, grâce aux propriétés des unités approchées, il existe $n_\varepsilon>0$ tel que $\int_{\delta\leq|y|\leq\pi}h_n(y)dy\leq\varepsilon$ pour $n\geq n_\varepsilon$ et donc

$$|(f*h_n)(x)-f(x)|\leq C\varepsilon$$

pour tout $n\geq n_\varepsilon$, où $C=1+M/\pi$. ☐

2.4. **Théorèmes de convergence.**

Théorème 2.24 (Théorème de Weierstrass)**.** *Toute fonction continue et 2π-périodique est la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.23 avec l'unité approchée de l'Exemple 2.21. ☐

Nous avons vu que les noyaux de Dirichlet $\{D_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ ne sont pas une unité approchée et donc nous ne pouvons pas conclure qu'une fonction continue 2π-périodique est la somme de sa série de Fourier. Nous avons quand même le résultat suivant.

Théorème 2.25 (Théorème de Dirichlet, admis)**.** *Soit f une fonction 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+)),$$

où $f(x^\pm)=\lim_{t\to x^\pm} f(t)$ et ces limites existent car f de $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exemple 2.26. Si nous considérons la fonction $f(x)=|x|$ sur $[-\pi,\pi]$ et prolongée par périodicité, nous avons (voir TD) : $c_0(f)=\frac{\pi}{2}$, $c_{\pm 2n}(f)=0$ pour tout $n\geq 1$, et $c_{\pm(2n+1)}(f)=\frac{-2}{\pi(2n+1)^2}$ pour tout $n\geq 0$. On a donc

$$\pi = f(\pi) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n\geq 0}\frac{2}{\pi(2n+1)^2} \Longrightarrow \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Vers la fin du 19ème siecle, l'italien Césaro a l'idée de "rendre convergentes des suites divergentes" $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en considérant les moyennes arithmétiques

$$v_n := \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}.$$

En effet, si l'on applique ce procédé à $\{u_n=(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Et bien évidemment, si $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell$, alors $\lim_{n\to\infty} v_n=\ell$.

Si on applique ce procédé à $\{S_N(f)\}_{N\in\mathbb{N}}$, on obtient

$$\begin{aligned}T_N(f) &:= \frac{1}{N}(S_0(f)+\cdots+S_{N-1}(f)) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e^{int}\\ &= \frac{1}{N}(f*D_0+\cdots+f*D_{N-1}) = f*F_N\end{aligned}$$

où

$$F_N := \frac{1}{N}(D_0+\cdots+D_{N-1})$$

s'appelle le *noyaux de Féjer.*

Théorème 2.27 (Théorème de Féjer)**.** *Soit f une fonction continue 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors les sommes de Féjer de f*

$$T_N(f) = \frac{1}{N}(S_0(f)+\cdots+S_{N-1}(f)) = f*F_N$$

convergent uniformément vers f.

Démonstration. La suite des noyaux de Féjer est unité approchée (voir TD), et il suffit donc d'appliquer la Proposition 2.23. □

2.5. **Fonctions périodiques de période quelconque.** Pour simplicité nous avons travaillé avec des fonctions 2π-périodiques, mais c'est naturel de considérer des fonctions T-périodiques, avec une période $T > 0$ quelconque. En effet, tout ce que nous avons vu jusqu'à là peut s'adapter dans ce cas. Il suffit en effet d'utiliser les fonctions

$$e_n(t) := e^{in\omega t} \text{ où } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

au lieu des fonctions e^{int}, ce qui donne par exemple

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt$$

pour les coefficients de Fourier, et tout marche pareil. C'est un bon exercice de re-écrire les définitions et les résultats dans les sections précedentes dans le cas des fonctions T-périodiques, avec $T > 0$.

2.6. **Formule de Parseval.** Nous verrons dans la suite que le cadre naturel pour étudier les séries de Fourier est celui des fonctions T-périodiques, avec $T > 0$, non nécessairement continues mais *de carré intégrable sur une période* :

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty.$$

On peut munir cet espace d'un produit hémitien :

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt,$$

et donc les fonctions exponentielles $e_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définies par $e_n(t) = e^{in\omega t}$, où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ forment une *famille orthonormée*, car on a $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{nm}$ (voir Lemme 2.4).

Pour l'instant nous allons admettre le résultat suivant, dont nous verrons une preuve dans la section 5.

Théorème 2.28 (Formule de Parseval)**.** *Pour toute fonction T-périodique, avec $T > 0$, et de carré intégrable sur une période on a :*

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

3. Transformée de Fourier, définition et premières propriétés

3.1. **Motivation.** Nous allons vouloir étudier l'analogue des coefficients de Fourier pour un signal non-périodique, a priori défini sur toute la droite réelle. Toutefois, on va le supposer d'énergie finie, et même dans un premier temps représenté par une fonction f absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

Une première idée peut être d'approximer cette fonction f par sa restriction à un intervalle $[-T/2, T/2]$ avec T très grand, et à traiter ceci comme une fonction périodique de période T. Ses coefficients de Fourier seront donnés par

$$c_{n,T}(f) := \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi in\frac{t}{T}}\frac{1}{T}dt.$$

Si f est assez régulière, ces coefficients décroissent rapidement et on peut écrire la fonction comme somme de sa série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,T}(f)e^{2\pi in\frac{t}{T}},$$

et si on pose

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt,$$

la formule d'avant se réécrit

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{2\pi in\frac{t}{T}}.$$

Si on fait tendre T vers l'infini, on peut voir (en utilisant les sommes de Riemann et la décroissance des coefficients) que ceci tend vers

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi t}d\xi.$$

Un de nos objectifs sera d'obtenir, pour des classes de fonctions assez larges une démonstration de cette formule de "reconstruction" de la fonction f à partir de sa transformée $\hat{f}$.

3.2. **Définition.**

Définition 3.1. Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles ou complexes), on pose

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt,$$

et on appelle $\hat{f}$ la *Transformée de Fourier* de f.

On notera parfois $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ (surtout quand f sera remplacée par une formule un peu longue).

Remarque 3.2. On remarque que cette intégrale converge car $|f(t)e^{-2\pi i\xi t}| = |f(t)|$, et par conséquent $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$. Notons aussi que $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

3.3. **Opérations de base.** Dans la proposition qui suit, par abus de notation, des expressions comme "$f(x+h)$" signifient "la fonction qui à x associe $f(x+h)$".

Proposition 3.3. *Soit f telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge. Alors :*

1. *Pour $h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f(x+h)) = e^{2\pi i \xi h}\hat{f}(\xi)$.*
2. *Pour $\delta > 0$, $\mathcal{F}(f(\delta x)) = \frac{1}{\delta}\hat{f}(\frac{\xi}{\delta})$.*
3. *$\mathcal{F}(e^{-2\pi i x h} f(x)) = \hat{f}(\xi + h)$.*
4. *Si de plus f est dérivable et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|dx$ converge, $\mathcal{F}(f'(x)) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$.*
5. *Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ converge, $\mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi) = \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$.*

Démonstration. (1) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)e^{-2\pi i \xi x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+h)e^{-2\pi i \xi (x+h)}e^{2\pi i \xi h}dx = e^{2\pi i \xi h}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i \xi t}dt.$$

(2) On procède au changement de variable $t = \delta x$, $dt = \delta dx$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta x)e^{-2\pi i \xi x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{\delta}\right) e^{-2\pi i \frac{\xi t}{\delta}}\frac{1}{\delta}dt.$$

(3) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x h} f(x)e^{-2\pi i \xi x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x(\xi+h)}dx.$$

(4) On intègre par parties : $u = e^{-2\pi i \xi x}$, $u' = -2\pi i \xi e^{-2\pi i \xi x}$, $v' = f'$, $v = f$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2\pi i \xi x}dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i \xi)e^{-2\pi i \xi x}dx;$$

cette formule est justifiée parce que l'intégrale qui apparaît dans le membre de gauche est absolument convergente, et parce que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

(5) On utilise le Théorème 1.4 de dérivation sous l'intégrale :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i x)e^{-2\pi i \xi x}dx = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi).$$

□

3.4. **Lemme de Riemann-Lebesgue.** Nous allons donner une version d'un résultat important, qui se retrouve dans des cadres plus généraux. La démonstration est plus délicate que la plupart de celles que nous ferons.

Théorème 3.4 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Si f et continue et que f est* absolument intégrable *sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est continue et* $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Idée de la démonstration. L'hypothèse dit que $\int_{|x|\geq A}|f(x)|dx$ est petite pour A assez grand. La remarque 3.2 montre donc que si on choisit un $\varepsilon' > 0$, on peut prendre $A > 0$ assez grand pour que

$$\left|\mathcal{F}(f\mathbf{1}_{]-\infty,-A[\cup]A,+\infty[})(\xi)\right| \leq \varepsilon'$$

pour tout ξ. On peut donc, pour les deux propriétés voulues, se ramener à une fonction à support borné, $f\mathbf{1}_{[-A,A]}$.

Pour démontrer la continuité, on estime $|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi+h)|$ grâce à la Proposition 3.3 (3). Pour démontrer que $\hat{f}$ tend vers zéro à l'infini, il faut utiliser l'uniforme continuité de $f\mathbf{1}_{[-A,A]}$, qui est donnée par le Théorème de Heine (cf. ci-dessous) et approximer f par une fonction en escalier, car la transformée de Fourier d'une telle fonction en escalier, explicitement connue, sera petite à l'infini (et celle de la différence bornée par un nombre petit, toujours par la remarque initiale).

On peut aussi approximer f par une fonction $\mathcal{C}^1$, dont on voit que la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini en faisant une intégration par parties (ou en appliquant la Proposition 3.3 (4)). □

3.5. **Appendice : Uniforme continuité, Théorème de Heine.**

Définition 3.5. On dit qu'une fonction f est *uniformément continue* sur un ensemble I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in I$ et $|x-y| \leq \delta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Remarque 3.6. Cela ressemble beaucoup à la définition de la continuité, et de fait cela implique la continuité (ordinaire), mais c'est plus fort. La différence est que d'habitude δ dépend de x (et de ε), alors qu'ici un même δ dépendant de ε est valable pour tous les $x \in I$.

Exemple 3.7. $f(x) = ax + b$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ($\delta = \varepsilon/|a|$ marchera), $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[-1, +1]$ ($\delta = \varepsilon/4$ par exemple), mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (pour tout δ donné, si $x \geq \frac{1}{\delta}$, alors $(x + \delta/2)^2 > x + 1$).

Théorème 3.8 (Théorème de Heine)**.** *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.*

4. Espace de Schwartz, inversion, convolution

4.1. **Espace de Schwartz.** Pour utiliser commodément les propriétés de la Proposition 3.3, on va se placer dans un espace qui est stable par les deux opérations de base que sont la dérivation et la multiplication par la variable x. Nous allons voir que la transformation de Fourier enverra cet espace dans lui-même, et mieux encore : que c'est une bijection, et isométrique dans un sens à définir.

On rappelle que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment (continûment) dérivables.

Définition 4.1. L'*espace de (Laurent) Schwartz* est défini par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall k, n \in \mathbb{N}, x^n f^{(k)}(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque 4.2. Cette définition implique aussi que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, la fonction $x^n f^{(k)}(x)$ tend vers zéro à l'infini, et est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour le montrer il suffit d'appliquer la définition en changeant les valeurs de n, voir TD).

Proposition 4.3. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Théorème 4.4. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Il faut voir que la fonction $\xi^n \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \hat{f}(\xi)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Or d'après la Proposition 3.3, cette fonction est la transformée de Fourier de

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[(-2\pi i x)^k f(x)\right],$$

et donc doit être bornée par la remarque initiale après la Définition 3.1. □

4.2. **Gaussiennes et identité approchée.**

Proposition 4.5. *Soit $G(x) := e^{-\pi x^2}$ (gaussienne). Alors $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\widehat{G}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$, autrement dit, la gaussienne est sa propre transformée de Fourier.*

Démonstration. Pour voir que $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on démontre par récurrence que $G^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-\pi x^2}$, où P_k est un polynôme de degré borné par k.

Pour calculer la transformée de Fourier, posons $F(\xi) := \widehat{G}(\xi)$. Alors, en appliquant la Proposition 3.3,

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi x}(-2\pi i x)e^{-\pi x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} i e^{-2\pi i \xi x} G'(x) dx = i \cdot (2\pi i \xi)\widehat{G}(\xi) = -2\pi\xi F(\xi). \end{aligned}$$

On a donc une équation différentielle pour F, et on sait que $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$. Si on pose $H(\xi) = F(\xi)e^{\pi\xi^2}$ on a que $H'(\xi) = (F'(\xi) + 2\pi\xi F(\xi))e^{\pi\xi^2} \equiv 0$ et donc H

est la fonction constante 1 car $F(0) = 1$. La solution pour F est donc unique, et vaut $F(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. $\square$

Un corollaire immédiat (en utilisant la Proposition 3.3 (2)) est que si on pose $G_\delta(x) := e^{-\pi\delta x^2}$, pour $\delta > 0$, alors

$$\widehat{G}_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi\frac{x^2}{\delta}} =: K_\delta(x) \text{ et } \widehat{K}_\delta(x) = G_\delta(x).$$

Définition 4.6. Une famille de fonctions $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ est appelée *identité approchée* si et seulement si :

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\delta(x)dx = 1$ et $\rho_\delta(x) \geq 0$;
(2) Pour tout $\eta > 0$, $\lim_{\delta\to 0} \int_{|x|>\eta} \rho_\delta(x)dx = 0$.

Proposition 4.7. *La famille $(K_\delta)_{\delta>0}$ est une identité approchée.*

Démonstration. Voir TD. $\square$

Nous allons avoir besoin d'un outil important, le **produit de convolution.** Certaines propriétés en seront données plus bas.

Définition 4.8. Si g est une fonction telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx$ converge, et si f est une fonction bornée, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $M_f > 0$ tel que $|f(x)| \leq M_f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on définit le *produit de convolution de f et g* :

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

Remarque 4.9. Le produit de convolution est bien défini, car

$$|f * g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)||g(t)|dt \leq M_f \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty$$

Proposition 4.10. *Si $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ est une identité approchée, et si f est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{\delta\to 0} f * \rho_\delta(x) = f(x)$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.*

Idée de la démonstration. On a :

$$\begin{aligned}|f * \rho_\delta(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x))\, \rho_\delta(t)dt \right| \\ &\leq \int_{|t|\geq\eta} |f(x-t) - f(x)|\, \rho_\delta(t)dt + \int_{|t|\leq\eta} |f(x-t) - f(x)|\, \rho_\delta(t)dt.\end{aligned}$$

Par uniforme continuité, on prend $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $|t| \leq \eta$ implique $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Donc le deuxième terme est majoré par $\frac{\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\delta(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}$.

Cet η étant fixé, on prend δ assez petit pour que

$$\int_{|t|\geq\eta} \rho_\delta(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty},$$

où $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$, ce qui implique que le premier terme est lui aussi majoré par $\varepsilon/2$. $\square$

Remarque 4.11. Si f est continue et $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, alors f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (*exercice*).

On en déduit donc le corollaire suivant.

Corollaire 4.12. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\{f * K_\delta\}_{\delta>0}$ converge uniformement vers f sur $\mathbb{R}$ pour $\delta \to 0$, où $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi\frac{x^2}{\delta}}$.*

4.3. **Un théorème à la Fubini.** Nous allons devoir admettre un théorème sur les intégrales en deux variables.

Considérons une fonction $F(x, y)$ de deux variables sur un produit d'intervalles ouverts $I \times J$. La fonction F est supposée intégrable (et donc bornée) sur tout ensemble de la forme $I_0 \times J_0$, où $I_0 \subset I$, $J_0 \subset J$ sont des intervalles fermés et bornés. Nous savons déjà (d'après le cours de calcul différentiel du S3) que

$$\int_{J_0} \left(\int_{I_0} F(x, y)dx \right) dy = \int_{I_0} \left(\int_{J_0} F(x, y)dy \right) dx,$$

et ce nombre définit $\int_{I_0\times J_0} F(x, y)dxdy$. Mais nous considérons maintenant des intervalles I, J qui peuvent ne pas être bornés, et aux extrémités de I et J la fonction F peut aussi tendre vers l'infini.

Théorème 4.13. *Supposons que pour tout $y \in J$, $\sup_{I_0\subset I} \int_{I_0} |F(x, y)|dx < +\infty$ (autrement dit, la fonction $F(\cdot, y)$ est absolument intégrable sur I), et que*

$$\sup_{J_0\subset J} \int_{J_0} \left(\sup_{I_0\subset I} \int_{I_0} |F(x, y)|dx \right) dy < +\infty$$

(autrement dit, la fonction $y \mapsto \int_I |F(x, y)|dx$ est intégrable sur J), alors la fonction $x \mapsto \int_J |F(x, y)|dy$ est intégrable sur I et on a

$$\int_J \left(\int_I F(x, y)dx \right) dy = \int_I \left(\int_J F(x, y)dy \right) dx.$$

Par exemple, si les intégrales itérées de la valeur absolue (prises dans un ordre ou autre) convergent, on peut faire l'intégrale d'une fonction de deux variables sur le plan tout entier en commençant par l'une ou l'autre variable (et en intégrant par rapport à la seconde ensuite), tout sera bien défini, et on obtiendra le même résultat avec les deux procédés.

Attention, tout ceci peut échouer si on n'a pas la convergence de l'intégrale de $|F|$. Prenons par exemple sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$f(x,y) := \sin(x-y) \text{ pour } y \leq x \leq y + 2\pi, \quad f(x,y) := 0 \text{ ailleurs.}$$

On calcule facilement que $\int_0^{+\infty} f(x,y)dx = 0$ (l'intégrale est prise en fait sur un intervalle fini), et donc $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy = 0$.

D'autre part, $\int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x-2\pi}^{x} \sin(x-y)dy = 0$ pour $x \geq 2\pi$, mais pour $x < 2\pi$ on trouve $\int_0^x \sin(x-y)dy = 1 - \cos x$. Ce qui implique $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dydx = \int_0^{2\pi}(1 - \cos x)dx = 2\pi$: les intégrales itérées convergent toutes les deux, mais leurs valeurs sont différentes.

C'est le même phénomène que celui qui se produit avec les séries semi-convergentes : en changeant l'ordre de sommation, on peut changer le résultat.

4.4. **Formule d'inversion.**

Proposition 4.14 (Formule de multiplication)**.** *Soient f et g absolument intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

Remarquons que les deux intégrables ci-dessus sont absolument convergentes, car f est absolument intégrable et $\hat{g}$ est bornée, et vice-versa.

Bien entendu, un cas (très) particulier des hypothèses est celui où $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Posons $F(x,y) := f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}$. Alors $|F(x,y)| = |f(x)||g(y)|$, et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|dxdy &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right) dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|dy\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right).\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le Théorème 4.13. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dy = f(x)\hat{g}(x)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dx = \hat{f}(y)g(y)$, on a donc

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dydx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 4.15 (Formule d'inversion de Fourier)**.** *Si f et $\hat{f}$ sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ (en particulier, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), alors*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Démonstration. Par un changement de variable $x \mapsto -x$ et grâce à la parité de K_δ,

$$f * K_\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) K_\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K_\delta(-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K_\delta(x) dx.$$

On applique la formule de multiplication avec $g = G_\delta$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K_\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) G_\delta(y) dy.$$

On a déjà vu que $\lim_{\delta \to 0} f * K_\delta(0) = f(0)$.

On sait que $\lim_{\delta \to 0} G_\delta(y) = 1$, et on veut passer la limite "à l'intérieur de l'intégrale". Une application du Théorème des Accroissements Finis montre que $|e^{-x} - 1| \leq x$ pour tout $x \geq 0$. Donc $|G_\delta(y) - 1| \leq \pi \delta A^2$ pour $|y| \leq A$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit A assez grand pour que

$$\int_{|y| \geq A} |\hat{f}(y) G_\delta(y)| dy \leq \int_{|y| \geq A} |\hat{f}(y)| dy < \varepsilon/4,$$

et on a d'autre part, une fois A fixé,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-A}^{A} \hat{f}(y) dy - \int_{-A}^{A} \hat{f}(y) G_\delta(y) dy \right| &\leq \int_{-A}^{A} |\hat{f}(y)| |1 - G_\delta(y)| dy \\ &\leq \pi \delta A^2 \int_{-A}^{A} |\hat{f}(y)| dy \leq \pi \delta A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)| dy < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

pour δ assez petit.

(On peut aussi démontrer la convergence plus rapidement en appliquant le théorème de convergence dominée).

Nous avons donc établi $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) dy$, c'est le cas $x = 0$ de notre théorème.

Pour obtenir le cas général, on pose $f_x(t) := f(x + t)$. On applique ce qu'on vient de démontrer à cette fonction de t, en se rappelant que $\hat{f}_x(\xi) = e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi)$:

$$f(x) = f_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_x(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

□

Remarque 4.16. Nous avons en fait établi que la transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour le voir, nous avons besoin d'une notation : on pose $\check{f}(x) := f(-x)$. Le changement de variable $x' = -x$ nous montre que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\check{f})(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)e^{-2\pi i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{2\pi i\xi x'}dx' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')e^{-2\pi i(-\xi)x'}dx' \\ &= \hat{f}(-\xi).\end{aligned} \tag{5}$$

Proposition 4.17. *La transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et son application inverse est donnée par $f \mapsto \mathcal{F}(\check{f})$.*

Démonstration. On sait déjà que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après le Théorème 4.4.

Le théorème 4.15, et l'équation (5) appliquée à $\hat{f}$ au lieu de f, montrent que toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est la transformée de Fourier de $(\hat{f})\check{}$. Donc $\mathcal{F}$ est surjective.

D'autre part, si $\hat{f} = \hat{g}$, alors $(\hat{f})\check{} = (\hat{g})\check{}$, et en appliquant la transformée de Fourier aux deux côtés de l'équation, on voit que $f = g$, donc $\mathcal{F}$ est bijective sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ☐

4.5. **Formule de Plancherel.** Nous venons de montrer dans la Proposition 4.17 que la transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Le prochain résultat nous montre qu'en effet la transformée de Fourier est une *isométrie* pour la norme définie par $\|f\|^2 := \int |f|^2$.

Théorème 4.18 (Formule de Plancherel)**.** *Supposons que f, $\hat{f}$, g et $\hat{g}$ sont absolument intégrables. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.$$

En particulier, si $f = g$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

Démonstration. En utilisant le fait que $\overline{\int f} = \int \overline{f}$, on voit facilement que $\overline{g(x)} = \mathcal{F}(\overline{\hat{g}})(x)$, car il suffit d'utiliser la formule d'inversion pour g. En fait on a

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi,$$

et donc

$$\overline{g(x)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\xi)e^{2\pi ix\xi}}d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\xi)}e^{-2\pi ix\xi}d\xi = \mathcal{F}(\overline{\hat{g}})(x).$$

D'après la formule de multiplication on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathcal{F}(\bar{\hat{g}})(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi,$$

ce qui termine la preuve. □

4.6. **Propriétés du produit de convolution.** Nous avons définit le produit de convolution dans la Définition 4.8. La définition que nous avons donnée présente une asymétrie quant aux conditions que f et g doivent satisfaire. En particulier, la commutativité de ce produit n'est pas immédiate et nous allons la montrer dans la proposition suivante.

Proposition 4.19. *Soit f une fonction bornée et g une fonction telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx$ converge. Alors, $g * f$ est bien défini et*

$$f * g(x) = g * f(x).$$

Démonstration. Soit $M_f := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Pour la bonne définition, on remarque que

$$\begin{aligned} |g * f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)f(t)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)||f(t)|dt \\ &\leq M_f \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|du < \infty. \end{aligned}$$

Pour x fixé, on considère le changement de variable $u = x - t$. Alors

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)(-du) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$

□

Le résultat suivant nous montre comment le produit de convolution se comporte par rapport à la dérivation.

Théorème 4.20. *Soient f, g deux fonctions bornées et absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx$ convergent. On suppose de plus que f est dérivable et que sa dérivée f' est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $f * g$ est dérivable et*

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = f' * g(x).$$

Démonstration. On va appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale (Théorème 1.4). Les hypothèses impliquent que pour tout $x, t \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x-t)g(t)| \leq \left(\sup_{\mathbb{R}} |f'|\right) |g(t)|,$$

donc on a l'hypothèse de domination par une fonction intégrable indépendante de x, donc $f * g(x)$ est dérivable et

$$\frac{d}{dx}\left(f * g\right)(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x-t)g(t)dt = f' * g(x).$$

□

Remarque 4.21. D'autres propriétés du produit de convolution sont traitées en Travaux Dirigés.

4.7. **Transformée de Fourier d'une convolution.** Le produit de convolution se comporte bien aussi par rapport à la transformée de Fourier.

Théorème 4.22. *Soient f et g absolument intégrables et bornées. Alors*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Démonstration. On veut appliquer le Théorème à la Fubini 4.13 pour changer l'ordre dans l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} f(x-t)g(t)dtdx.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-2\pi i x\xi} f(x-t)g(t)\right| dxdt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|\, dxdt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx\right) < +\infty.\end{aligned}$$

D'après les définitions de la transformée de Fourier et du produit de convolution, on a alors

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt\right)dx,$$

ce qui donne, en appliquant le changement d'ordre dans l'intégration, puis la propriété sur la transformée de Fourier de $f(x-t)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-2\pi i x\xi}dx\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i t\xi}\hat{f}(\xi)dt = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

□

Corollaire 4.23. *Si $f, g, \hat{f}, \hat{g}$ sont absolument intégrables (en particulier si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), alors $\widehat{fg}(\xi) = (\hat{f} * \hat{g})(\xi)$.*

Démonstration. On remarque que $\hat{f}\hat{g}$ est absolument intégrable, par exemple parce que $\hat{f}$ est absolument intégrable et $\hat{g}$ est bornée.

D'autre part, si u et v sont absolument intégrables et bornées, alors $\check{u} * \check{v} = (u * v)\check{}$. En effet, en faisant le changement de variable $t' = -t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(-(x-t))v(-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-x-t'))v(t')dt' = u * v(-x).$$

On a vu en TD que si f et g sont absolument intégrables, alors $f * g$ l'est aussi.

Donc, grâce au Théorème 4.22 sur la transformée de Fourier d'un produit de convolution et au Théorème 4.15 d'inversion de Fourier, on a

$$\mathcal{F}\left((\hat{f} * \hat{g})\check{}\right) = \mathcal{F}\left((\hat{f})\check{} * (\hat{g})\check{}\right) = \mathcal{F}\left((\hat{f})\check{}\right)\mathcal{F}\left((\hat{g})\check{}\right) = fg.$$

En appliquant la transformée de Fourier des deux côtés, et à nouveau le Théorème 4.15 d'inversion de Fourier au premier terme, on retrouve enfin $\hat{f} * \hat{g} = \mathcal{F}(fg)$. $\square$

5. Espaces de Hilbert

Nous avons vu dans ce qui precede que la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ joue le rôle d'une norme au carré. Par contre les espaces des fonctions que nous avons considéré sont de dimension infinie.

Notre but est de donner ici un aperçu de la théorie des espaces de Hilbert, qui généralisent les espaces euclidiens que vous connaissez déjà. Les difficultés spécifiques sont les suivantes :

- la convergence des suites peut être problématique,
- on ne peut pas trouver de base finie.

Ce dernier point va nous conduire à la notion de *base hilbertienne* qui, comme nous le verrons, va être différente de celle de base au sens habituelle.

5.1. **Produit hermitien.** Nous faisons ici quelques rappels de ce qui a déjà été vu en cours d'algèbre linéaire.

On se place dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$.

Définition 5.1. Une application $E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à un couple de vecteurs $(x, y) \in E \times E$ associe le scalaire $\langle x, y\rangle$ est dite *produit hermitien* (ou scalaire, ou intérieur) si et seulement si

(1) Pour tout $y_0 \in E$ fixé, $x \mapsto \langle x, y_0\rangle$ est linéaire ;
(2) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$;
(3) $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

On appelle *norme* d'un vecteur le réel positif $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

La distance de deux vecteurs x, y est donnée par $\|x - y\|$.

Exemple 5.2. Voici des exemples d'espaces vectoriels normés que nous avons rencontré.

(1) L'espace $E = \mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$, avec le produit $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.
(2) L'espace $E = \mathbb{C}[X]|_{\mathbb{R}}$ des polynômes à coefficients complexes, de variable réelle, avec le produit $\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\overline{Q(x)}e^{-x^2}dx$.
(3) L'espace de Schwartz $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avec le produit $\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$.

Nous rappelons ici une des propriétés fondamentales dont nous aurons besoin. **Sa preuve est admise dans le cours, mais se trouve dans ces notes pour les étudiants intéressés.**

Théorème 5.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.*

Démonstration. Pour $x, y \in E$, $t, \theta \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \langle x + te^{i\theta}y, x + te^{i\theta}y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}\langle x, y\rangle\right) + t^2\langle y, y\rangle.$$

On choisit θ tel que $e^{-i\theta}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$, et comme nous avons un trinôme de signe constant, son discriminant est négatif ou nul, donc

$$\Delta = 4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0,$$

ce qui démontre le résultat voulu en passant aux racines carrées. □

Un corollaire de cette inégalité est que la “distance” que nous avons définie ci-dessus vérifie bien *l'inégalité triangulaire* : $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$, et par conséquent aussi $\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Il existe de nombreuses autres sortes de “normes” qui n'ont pas toutes les bonnes propriétés des normes provenant d'un produit scalaire. La propriété suivante caractérise en fait ces dernières (mais nous ne le montrerons pas).

Proposition 5.4 (Identité du parallélogramme)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors pour tous vecteurs $x, y \in E$,*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Démonstration.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

□

Une autre importante propriété des normes issues d'un produit hermitien (ou scalaire) concerne la notion de projection sur un sous-espace.

Définition 5.5. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$, V un sous-espace vectoriel de E, et $x_0 \in E$. Une *projection (orthogonale) de x_0 sur V* est in élément $y_0 \in V$, tel que

$$\|x_0 - y_0\| = \min_{y \in V} \|x_0 - y\|,$$

c'est-à-dire

$$d(x_0, y_0) = \min_{y \in V} d(x_0, y).$$

En général, ce n'est pas vrai qu'on a toujours une projection orthogonale, comme nous le verrons dans la Remarque 5.7. Par contre, si la projection orthogonale existe, alors elle est unique, comme le montre le résultat suivant : **sa preuve est admise dans le cours, mais se trouve dans ces notes pour les étudiants intéressés.**

Théorème 5.6 (Unicité de la projection)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$, V un sous-espace vectoriel de E, et $x_0 \in E$. S'il existe $y_0 \in V$ qui réalise la plus courte distance de x_0 à V, c'est-à-dire*

$$\|x_0 - y_0\| = \min_{y \in V} \|x_0 - y\|,$$

alors y_0 est unique, et est l'unique vecteur $y \in V$ tel que $x_0 - y$ soit orthogonal à V, c'est-à-dire que

$$\langle x_0 - y, z\rangle = 0, \text{ pour tout } z \in V. \tag{6}$$

De plus, si $(p_n)_n \subset V$ est suite minimisante*, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - x_0\| = \inf_{p \in V} \|x_0 - p\|,$$

alors la suite $(p_n)_n$ est de Cauchy.

Démonstration. Soient p_0 et $p_1 \in V$, $x_0 \in E$. On applique l'identité du parallélogramme avec $x = p_0 - x_0$ et $y = p_1 - x_0$. Alors

$$\|p_0 - x_0 + p_1 - x_0\|^2 = 2\|p_0 - x_0\|^2 + 2\|p_1 - x_0\|^2 - \|p_0 - p_1\|^2,$$

donc en divisant par 4,

$$\left\|\frac{p_0 + p_1}{2} - x_0\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|p_0 - x_0\|^2 + \|p_1 - x_0\|^2\right) - \frac{1}{4}\|p_0 - p_1\|^2.$$

En particulier, si on pose $m := \operatorname{dist}(x_0, V) := \inf_{p\in V} \|x - p\|$, alors si $\|p_0 - x_0\|^2, \|p_1 - x_0\|^2 \leq m^2 + \delta$, on aura

$$\|p_0 - p_1\|^2 = 2\left(\|p_0 - x_0\|^2 + \|p_1 - x_0\|^2 - 2\left\|\frac{p_0 + p_1}{2} - x_0\right\|^2\right) \leq 2m^2 + 2\delta - 2m^2 = 2\delta.$$

Ceci a deux conséquences : si la borne inférieure est atteinte par p_0, p_1 tels que $m = \|p_0 - x_0\| = \|p_1 - x_0\|$, alors $p_0 = p_1$; et toute suite minimisante est une suite de Cauchy (cf. Définition 5.8), ce qu'on voit en remplaçant p_0, p_1 par des éléments p_n, p_q d'une suite minimisante avec $n, q \geq N$ assez grand pour que $\|p_n - x\|, \|p_q - x\| \leq m + \varepsilon^2/2$.

Pour montrer les affirmations sur l'orthogonalité, supposons d'abord que (6) soit vérifiée pour un y_0. Alors pour tout $y \in V$, $y - y_0 \in V$, donc $\langle x_0 - y_0, y - y_0\rangle = 0$ et par Pythagore, $\|x - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2$, ce qui montre que y_0 réalise la plus courte distance.

Réciproquement, si y_0 réalise la plus courte distance, pour tout $z \in V$, $t, \theta \in \mathbb{R}$,

$$\|x_0 - y_0\|^2 \leq \|x_0 - y_0 + te^{i\theta} z\|^2 = \|x_0 - y_0\|^2 + 2t \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}\langle x_0 - y_0, z\rangle\right) + t^2\|z\|^2,$$

donc comme l'expression à droite est minimale pour $t = 0$, sa dérivée doit s'annuler en $t = 0$: $\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}\langle x - y_0, z\rangle\right) = 0$ pour tout θ. Ceci implique que $\langle x - y_0, z\rangle = 0$. □

Remarque 5.7. **Attention ! Il se pourrait très bien qu'aucune projection n'existe.** Par exemple, prenons E l'espace des fonctions continues par morceaux (et donc bornées) sur $[-1,1]$, muni du même produit hermitien que dans l'exemple 5.2 (1), et V le sous-espace des fonctions continues sur $[-1,1]$. Alors si on prend $f_0 = \chi_{[0,1]}$, elle n'a pas de projection sur V. La raison est qu'on peut approcher f_0 d'aussi près qu'on veut par des fonctions continues ; la projection "devrait" donc être f_0 elle-même, mais elle n'est pas dans V, puisque discontinue.

5.2. **Espaces complets et de Hilbert.** On rappelle les notions topologiques de suite de Cauchy et d'espace complet :

Définition 5.8. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n)_{n\geq 0} \subset X$ est dite *suite de Cauchy* si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N_\varepsilon$, alors $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$.

Remarque 5.9. En particulier, toute suite convergente est de Cauchy (*exercice*).

Définition 5.10. Un espace vectoriel normé est dit *complet* si toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 5.11. Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel muni d'un produit hermitien qui est complet pour la norme induite par le produit hermitien.

Proposition 5.12. *Un sous-espace F d'un espace de Hilbert H est fermé*[1] *si et seulement s'il est lui-même de Hilbert.*

Démonstration. Soit F fermé. Soit $(v_n)_{n\geq 0} \subset F$ une suite de Cauchy. Alors elle admet une limite $v \in H$. Mais comme F est fermé, il contient la limite de toute suite convergente contenue dans F, donc $v \in F$.

Réciproquement, soit $(v_n)_n \subset F$ une suite qui converge vers $v \in H$. Alors $(v_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc convergente dans F puisque F est de Hilbert, donc par unicité de la limite on a $v \in F$. □

Reprenons la situation du Théorème 5.6. L'identité du parallélogramme permet de montrer que si $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \|x_0 - y_n\| = \inf_{y\in V} \|x_0 - y\|$, alors la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Donc elle sera convergente. *La projection sur un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est donc toujours définie et unique.*

[1]On rappelle qu'un sous-ensemble F d'un espace métrique (X, d) est *fermé* si et seulement s'il coincide avec son adhérence, et donc si et seulement si pour toute suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F et convergente vers $f_\infty \in X$ on a que la limite f_∞ appartient à F (pour plus de détails reviser le cours de Topologie du L1).

Nous citerons ici deux exemples importants d'espaces de Hilbert.

Exemple 1 : $\ell^2(\mathbb{Z})$. Soit $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites à valeurs complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|u_n|^2<+\infty$. C'est celui qui intervient naturellement quand on considère les séries de Fourier. C'est un espace vectoriel (le seul point délicat de la démonstration est que si $u,v\in\ell^2(\mathbb{Z})$, alors $u+v\in\ell^2(\mathbb{Z})$; cela vient du fait que $|u_n+v_n|^2\le|u_n|^2+2|u_n||v_n|+|v_n|^2\le 2|u_n|^2+2|v_n|^2$).

On peut munir cet espace du produit hermitien

$$\langle u,v\rangle:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n\bar v_n.$$

A nouveau, cette somme converge car $|u_n\bar v_n|\le|u_n|^2+|v_n|^2$, et les autres propriétés d'un produit hermitien sont facilement vérifiées.

Proposition 5.13. *L'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$, muni du produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$, est un espace de Hilbert.*

Démonstration. L'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et le produit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit hermitien. Nous devons donc montrer que toute suite de Cauchy est convergente.

Considérons une suite de Cauchy $(\mathbf{c}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}\subset\ell^2(\mathbb{Z})$, chaque terme $\mathbf{c}^{(k)}$ de cette suite s'écrivant en détail $\mathbf{c}^{(k)}=(c_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Comme la suite $(\mathbf{c}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, en particulier elle est bornée, i.e. $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|\mathbf{c}^{(k)}\|=:S<+\infty$. De plus, pour chaque n fixé, $(c_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc $\lim_{k\in\mathbb{N}}c_n^{(k)}$ existe dans $\mathbb{C}$. On note c_n cette limite.

Pour tout $N\in\mathbb{N}$ nous avons

$$\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2=\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}|c_n^{(k)}|^2\le S^2<+\infty,$$

donc $\mathbf{c}:=(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$.

Il reste à montrer que $\|\mathbf{c}^{(k)}-\mathbf{c}\|\to 0$ quand $k\to+\infty$.

Posons, pour raccourcir la notation, $\mathbf{a}^{(k)}=\mathbf{c}^{(k)}-\mathbf{c}$. Il reste à montrer que $\|\mathbf{a}^{(k)}\|\to 0$ quand $k\to+\infty$.

Supposons pour obtenir une contradiction que $\|\mathbf{a}^{(k)}\|$ ne tende pas vers 0. Alors il existe $\varepsilon>0$ tel qu'on puisse trouver des entiers k arbitrairement grands avec $\|\mathbf{a}^{(k)}\|>\varepsilon$.

D'après l'hypothèse qu'on a une suite de Cauchy, il existe $K=K(\varepsilon)$ tel que pour tous $l,m\ge K$,

$$\|\mathbf{a}^{(l)}-\mathbf{a}^{(m)}\|=\|\mathbf{c}^{(l)}-\mathbf{c}-(\mathbf{c}^{(m)}-\mathbf{c})\|=\|\mathbf{c}^{(l)}-\mathbf{c}^{(m)}\|\le\varepsilon/2,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n^{(l)}-a_n^{(m)}|^2\le\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

D'après ce qu'on a dit juste avant, il existe $k_1 \geq K$ tel que $\|\mathbf{a}^{(k_1)}\| > \varepsilon$. Ceci signifie, en utilisant la définition de la somme d'une série, qu'il existe N_1 tel que

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} \left|a_n^{(k_1)}\right|^2 > \varepsilon^2.$$

Mais alors, pour tout $m \geq k_1 \geq K$,

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} |a_n^{(k_1)} - a_n^{(m)}|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n^{(k_1)} - a_n^{(m)}|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

D'autre part, comme on a une somme finie et que $\lim_{m\to\infty} a_n^{(m)} = 0$ pour tout n fixé, on a

$$\frac{\varepsilon^2}{4} \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-N_1}^{N_1} |a_n^{(k_1)} - a_n^{(m)}|^2 = \sum_{n=-N_1}^{N_1} |a_n^{(k_1)}|^2 > \varepsilon^2,$$

ce qui nous donne une contradiction. □

Exemple 2 : L^2**.** On peut définir une notion plus compliquée d'intégrale (due à Henri Lebesgue), qui permet d'étendre l'intégrale de Riemann et les intégrales généralisées dans le cas de la convergence absolue.

On notera $\int_{\mathbb{R}} f$ cette intégrale, qui en particulier est égale à l'intégrale habituelle quand $\int_{\mathbb{R}} |f|$ converge. Quand $f \geq 0$ et que l'intégrale diverge, on écrit $\int_{\mathbb{R}} f = +\infty$. Cette construction est valide sur une classe de fonctions très vaste, qui contient en particulier toutes les fonctions continues par morceaux, et toutes les limites simples de suites de telles fonctions.

On va assimiler deux fonctions f, g de cette classe quand $\int_{\mathbb{R}} |f - g| = 0$, ce qui (admis !) est équivalent à $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f\neq g\}} = 0$, et donc à $\int_{\mathbb{R}} |f - g|^2 = 0$. Techniquement, c'est une relation d'équivalence, et on a remplacé les fonctions par leur classe d'équivalence par rapport à cette relation. Remarquons que si f, g sont continues, alors $\int_{\mathbb{R}} |f - g| = 0$ si et seulement si $f = g$; par contre, si on prend une fonction donnée et qu'on change sa valeur en un nombre fini de points, alors on ne change pas son intégrale (en fait, on pourrait changer la valeur sur des ensembles beaucoup plus grands, comme des ensembles infinis dénombrables, sans changer la valeur de l'intégrale au sens de Lebesgue).

Nous allons devoir admettre les faits suivants :

Assertion 5.14 (Admis)**.** *Pour tout intervalle* $]a, b[\subset \mathbb{R}$*, l'espace* $L^2(a, b)$ *des fonctions* f *telles que* $\int_a^b |f|^2$ *a un sens et est finie, est un espace complet pour la norme donnée par* $\|f\|^2 := \int_a^b |f|^2$*, qui provient du produit hermitien* $\langle f, g\rangle := \int_a^b f\bar{g}$*, (lui-même bien défini car en tout point* $|f(x)\bar{g}(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$*. C'est donc un espace de Hilbert.*

Avant d'énoncer le prochain fait que nous allons admettre, nous avons besoin de rappeler deux définitions.

Définition 5.15. Un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d) est *dense dans* X si $\overline{A} = X$.

Définition 5.16. Étant donné un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on dira que f est *à support compact* dans $]a, b[$ s'il existe $c < d \in]a, b[$ tels que $f(x) = 0$ si $a < x < c$ ou $d < x < b$. On notera $\mathcal{C}_C(]a, b[)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $]a, b[$.

Assertion 5.17 (Admis)**.** *Soit* $]a, b[\subset \mathbb{R}$ *avec* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. *L'espace* $\mathcal{C}_C(]a, b[)$ *est dense dans* $L^2(a, b)$ *au sens de la norme définie ci-dessus, c'est-à-dire que pour tout* $f \in L^2(a, b)$, *il existe une suite* (g_n) *d'éléments de* $\mathcal{C}_C(]a, b[)$ *telle que* $\lim_n \|f - g_n\| = 0$.

Théorème 5.18 (Admis)**.** *L'espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$.

La démonstration de ce dernier résultat utilise, en particulier, la convolution par des identités approchées.

Remarque 5.19. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un sous-espace propre de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ mais $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \neq L^2(\mathbb{R})$), car par exemple la fonction porte $\chi_{[-1/2,1/2]} \in L^2(\mathbb{R})$ mais $\chi_{[-1/2,1/2]} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\chi_{[-1/2,1/2]}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$). L'assertion 5.18 implique donc que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ne coincide pas avec son adherence $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ car $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$ et donc $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ n'est pas fermé dans $L^2(\mathbb{R})$. La Proposition 5.12 implique donc que l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$.

Le Théorème 5.18 va nous permettre d'étendre la transformée de Fourier à l'espace $L^2(\mathbb{R})$, grâce au résultat (facile) suivant de topologie sur le prolongement des applications uniformément continues dans un espace complet.

Proposition 5.20. *Soient* X *et* Y *des espaces de Hilbert et* $A \subset X$ *une partie dense de* X. *Soit* $f\colon A \to Y$ *une application qui vérifie : il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tous* $a, b \in A$,

$$\|f(a) - f(b)\| \leq C\|a - b\|.$$

Alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ *de* f *à* X, *c'est-à-dire une application de* $\tilde{f}\colon X \to Y$ *qui vérifie* $\tilde{f}(a) = f(a)$ *pour tout* $a \in A$, *et de plus, pour tous* $x, x' \in X$ *on a*

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| \leq C\|x - x'\|.$$

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Supposons que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ soient deux prolongements. Pour tout $x \in X$, il existe (par densité de A dans X) une suite $(a_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, donc

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}(a_n) = \tilde{g}(x).$$

Montrons maintenant l'existence. Pour construire un prolongement, pour $x \in X$, on prend une suite $(a_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Alors (a_n) est une suite de Cauchy.

Donc $(f(a_n))_n$ est une suite de Cauchy, puisque étant donné $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour $n, m \geq N$, $\|a_n - a_m\| \leq \varepsilon/C$, donc $\|f(a_n) - f(a_m)\| \leq C \cdot \varepsilon/C = \varepsilon$. La suite $(f(a_n))_n$ est convergente puisque Y est complet.

On pose donc $\tilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(a_n)$. Si $x \in A$, $\|f(x) - f(a_n)\| \leq C\|x - a_n\| \to 0$, donc $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \tilde{f}(x)$, on a donc un prolongement. A cause de l'unicité démontrée ci-dessus, si on le construisait en prenant d'autre choix de suites $(a_n)_n$, on trouverait le même résultat.

Montrons enfin l'inégalité annoncée. Soient $(a_n)_n, (a'_n)_n$ les suites utilisées pour définir $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{f}(x')$ respectivement. Alors

$$f(a_n) - f(a'_n) = f(a_n) - \tilde{f}(x) + \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x') + \tilde{f}(x') - f(a'_n),$$

donc l'inégalité triangulaire implique

$$\|f(a_n) - f(a'_n)\| \leq \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| + \|f(a_n) - \tilde{f}(x)\| + \|\tilde{f}(x') - f(a'_n)\|,$$

et

$$\|f(a_n) - f(a'_n)\| \geq \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| - \|f(a_n) - \tilde{f}(x)\| - \|\tilde{f}(x') - f(a'_n)\|,$$

ce qui montre par le théorème d'encadrement que

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| = \lim_{n\to\infty} \|f(a_n) - f(a'_n)\|,$$

et en particulier que la limite existe et vérifie

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| = \lim_{n\to\infty} \|f(a_n) - f(a'_n)\| \leq C \lim_{n\to\infty} \|a_n - a'_n\| = C\|x - x'\|.$$

□

Le Théorème 4.18, la Proposition 5.20 et le Théorème 5.18 entrainent donc :

Théorème 5.21. *La transformation de Fourier s'étend à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ comme l'unique prolongement continu de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En particulier, on aura encore $\|\hat{f}\| = \|f\|$.*

Ainsi l'espace $L^2(\mathbb{R})$ fournit un domaine naturel d'extension de la transformée de Fourier, sur lequel elle est une bijection isométrique, et qui contient l'ensemble de toutes les fonctions continues par morceaux, bornées et absolument intégrables (que nous avions considéré jusqu'à présent), et en particulier la classe de Schwartz.

Le théorème d'inversion se prolonge aussi. Notons temporairement $\hat{f}$ la transformée de Fourier au sens habituel et $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier prolongée à $L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 5.22. *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^2(f) := \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = \check{f}$, où $\check{f}(x) := f(-x)$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui tend vers f (par exemple, on peut prendre $(f_n)_n \subset \mathcal{C}_C(\mathbb{R})$). Par construction, $\mathcal{F}^2(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^2(f_n)$ et par changement de variable $x' = -x$ (qui est toujours valide dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue), $\check{f} = \lim_{n\to\infty} \check{f}_n$. Alors, en utilisant la continuité de la norme on a

$$\|\mathcal{F}^2(f) - \check{f}\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}^2(f_n) - \check{f}_n\| = 0.$$

□

Nous pouvons désormais définir une transformée de Fourier aussi pour une autre classe de fonctions non nécessairement intégrables.

Proposition 5.23. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $C > 0$ avec $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $N \in \mathbb{N}$, soit $f_N(x) := f(x)\chi_{[-N,N]}(x)$(qui est absolument intégrable). Alors, si on appelle encore $\mathcal{F}$ le prolongement de la transformée de Fourier donné par le théorème ci-dessus, $\mathcal{F}(f) = \lim_{N\to+\infty} \hat{f}_N$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $(f_N)_N$ est une suite qui tend vers f au sens de $L^2(\mathbb{R})$. Or en tout point $\lim_{n\to\infty}(f(x) - f_N(x))^2 = 0$ (puisque c'est égal à 0 dès que $N \geq |x|$). D'autre part, pour tout x et tout N, $|f_N(x) - f(x)|^2 \leq 2|f(x)|^2 \leq C^2(1+|x|)^{-2}$, qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le Théorème de la Convergence Dominée, $\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_N(x)|^2 dx = 0$. □

Si jamais on suppose qu'en plus f est bornée et absolument intégrable, il est facile de montrer par le Théorème de la convergence dominée que $\lim_{N\to+\infty} \hat{f}_N(\xi)$ existe en tout point, et vaut $\hat{f}(\xi)$ (la transformée de Fourier au sens habituel), et les théorèmes que nous connaissons déjà (le fait que la transformée de Fourier conserve la norme de $L^2(\mathbb{R})$) permettent de montrer que $\mathcal{F}(f) = \lim_{N\to+\infty} \hat{f}_N$ au sens de l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 5.24. **Attention !** La limite au sens de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, dans le cas général, ne veut pas forcément dire qu'on a $F(f)(\xi) = \lim_{N\to+\infty} \hat{f}_N(\xi)$ pour tout ξ.

Exemple 5.25. Prenons par exemple la fonction $S(\xi) := \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$. Nous savons qu'elle est la tranformée de Fourier de la fonction porte, $f_0(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$. Ces fonctions étant paires, on conjecture bien entendu (à cause de la formule d'inversion) que la transformée de Fourier $\hat{S}$ est égale à f_0. On peut démontrer par des méthodes d'analyse complexe (formule des résidus) que c'est vrai en tout $\xi \notin \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$. En ces deux points, les formules divergent, ce qui n'est pas très surprenant puisqu'ils correspondent à des discontinuités de f_0. Mais comme deux points, c'est négligeable au sens de $L^2(\mathbb{R})$, on vérifie que dans cet exemple particulier la formule d'inversion de Fourier est valide.

5.3. **Bases hilbertiennes.**

Définition 5.26. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit hermitien.

- Un *système orthonormé* est une famille de vecteurs de E, $\{x_j, j \in \mathcal{J}\}$, telle que $\langle x_j, x_k\rangle = 1$ si $j = k$ et $= 0$ si $j \neq k$. On note en général $\langle x_j, x_k\rangle = \delta_{j,k}$.
- Le *sous-espace vectoriel engendré par* $\{x_j, j \in \mathcal{J}\}$ est l'ensemble des combinaisons linéraires finies des x_j, c'est-à-dire
$$\mathrm{Vect}\{x_j, j \in \mathcal{J}\} := \left\{ x \in E : \exists \mathcal{J}_0 \text{ fini } \subset \mathcal{J}, \lambda_j \in \mathbb{C}, \text{ t.q. } x = \sum_{j\in\mathcal{J}_0} \lambda_j x_j \right\}.$$
- La famille $\{x_j, j \in \mathcal{J}\}$ est *génératrice* si $\mathrm{Vect}(x_j, j \in \mathcal{J}) = E$.
- La famille $\{x_j, j \in \mathcal{J}\}$ est un *système complet* si $\mathrm{Vect}\,(x_j, j \in \mathcal{J})$ est dense dans E.
- La famille $\{x_j, j \in \mathcal{J}\}$ est une *base hilbertienne* si c'est un système orthonormé et complet.

Remarque 5.27. Il est facile de montrer, comme dans le cas des espaces de dimension finie, qu'un système orthonormé est libre. Un système orthonormé générateur s'appelle une *base orthonormée*.

En dimension infinie, un système complet est beaucoup plus petit qu'un système générateur. En fait, on peut montrer (avec des méthodes qui dépassent largement le niveau de notre cours) qu'un espace de Hilbert qui admet une base hilbertienne dénombrable infinie ne peut pas admettre de base orthonormée. La bonne notion est donc celle de base hilbertienne, mais il faut bien comprendre qu'en général, ce n'est pas une base au sens habituel ! (voir Feuille de TD 4, exercice 4).

Exemple 5.28. Le système $(\mathbf{e}^{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$, où $\mathbf{e}^{(k)} = (e_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $e_n^{(k)} = \delta_{k,n}$, est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{Z})$. C'est l'analogue dénombrable de la base canonique dans $\mathbb{C}^n$ muni du produit hermitien usuel.

Démonstration. Le fait qu'on a un système orthonormé se vérifie facilement. Pour voir que c'est un système complet, il suffit de voir que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est limite des suites tronquées u^N définies pour $N \in \mathbb{N}$ par $u_n^N = u_n$ si $|n| \leq N$, $u_n^N = 0$ si $|n| > N$. Or $\|u - u^N\|^2 = \sum_{|n|>N} |u_n|^2 \to 0$ quand $N \to +\infty$ puisqu'on a une série convergente. □

Proposition 5.29. *Soit $\{v_1, \dots, v_d\}$ un système orthonormé fini de E et soit $V :=$ Vect$\{v_1, \dots, v_d\}$. Alors pour tout $f \in E$ la projection orthogonale de f sur V existe et est donnée par*
$$\pi_V(f) = \sum_{j=1}^{d} \langle f, v_j\rangle v_j.$$

Démonstration. Notons provisoirement $P(f)$ le membre de droite de l'égalité ci-dessus. Alors pour $1 \leq k \leq d$,

$$\langle f - P(f), v_k\rangle = \langle f, v_k\rangle - \sum_{j=1}^{d} \langle f, v_j\rangle\langle v_j, v_k\rangle = \langle f, v_k\rangle - \langle f, v_k\rangle = 0,$$

puisque le seul terme non nul dans la somme apparaît pour $j = k$.

Maintenant si on prend un vecteur quelconque $h \in V$, on a $h = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k v_k$ et

$$\langle f - P(f), h\rangle = \sum_{k=1}^{d} \bar{\lambda}_k \langle f - P(f), v_k\rangle = 0.$$

On a donc vérifié le critère du Théorème de projection. □

On remarquera que, de façon analogue au cas de la dimension finie, les produits $\langle f, v_k\rangle$ donnent des "coordonnées" de f par rapport au système orthonormé.

Corollaire 5.30. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.*

Démonstration. En effet, tout espace vectoriel de dimension finie admet une base orthonormée et on peut donc lui appliquer la proposition. Si il existe une suite $(f_n) \subset V$ telle que $f_n \to f$, alors $\inf_{h\in V} \|f - h\| \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|f - f_n\| = 0$, donc $f = \pi_V(f) \in V$. □

Une autre conséquence importante se trouve en appliquant le Théorème de Pythagore aux vecteurs orthogonaux $f - \pi_V(f)$ et $\pi_V(f)$:

$$\|f\|^2 = \|f - \pi_V(f)\|^2 + \|\pi_V(f)\|^2 \geq \|\pi_V(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{d} |\langle f, v_j\rangle|^2. \tag{7}$$

En effet, on a un résultat meilleure :

Théorème 5.31 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit $\{e_j, j \in \mathbb{N}^*\}$ un système orthonormé dans E. Alors pour tout $f \in E$,*

$$\|f\|^2 \geq \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle f, e_j\rangle|^2.$$

En particulier, la série $\sum_{j=1}^{+\infty} |\langle f, e_j\rangle|^2$ est convergente.

Démonstration. Soit $f \in E$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le système $\{e_j, 1 \leq j \leq N\}$ est orthonormé, on peut donc appliquer la Proposition 5.29 et le calcul (7), ce qui nous donne

$$\|f\|^2 \geq \sum_{j=1}^{N} |\langle f, e_j\rangle|^2,$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Donc toute somme partielle de la série à termes positifs admet la borne $\|f\|^2$, ce qui implique la convergence et l'inégalité qu'on a affirmée. □

Théorème 5.32 (Identité de Parseval)**.** *Soit* $\{e_j, j \in \mathbb{N}^*\}$ *une base hilbertienne de l'espace* E*. Alors pour tout* $f \in E$*,*

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle f, e_j\rangle|^2.$$

Démonstration. Soit $V_n := \mathrm{Vect}\,(e_j, 1 \leq j \leq n)$. Comme le système $\{e_j, j \in \mathbb{N}^*\}$ est complet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n et $f_n \in V_n$ tels que $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$, et donc $\|f - \pi_{V_n}(f)\| \leq \varepsilon$, donc d'après le Théorème de Pythagore $\|f\|^2 - \varepsilon^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j\rangle|^2$. Ceci implique $\sum_{j=1}^{+\infty} |\langle f, e_j\rangle|^2 = \|f\|^2$. □

Remarque 5.33. Si E est un espace de Hilbert qui admet une base hilbertienne dénombrable $\{e_j, j \in \mathbb{N}^*\}$, alors l'application $f \mapsto (\langle f, e_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}^*}$ donne une isométrie entre l'espace E et $\ell^2(\mathbb{N}^*)$. Donc l'exemple 5.28 décrit, à isométrie près, la situation dans tous ces cas (qui sont très répandus, on parle alors d'espace de Hilbert *séparable*). En ce sens il n'y a qu'un seul espace de Hilbert séparable, que les physiciens appellent parfois "l'espace de Hilbert".

Exemple 5.34. Soit e_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(x) := e^{inx}$. On peut en particulier la considérer comme une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$, périodique de période 2π, et donc aussi comme un élément de $L^2(-\pi, \pi)$. On munit cet espace du produit hermitien $\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}$. On a que $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne. En effet, il est facile de voir que c'est un système orthonormé (revisez votre cours sur les séries de Fourier !), et plus délicat que c'est un système complet (cf. Feuille de TD 4). On pose $c_n(f) := \langle f, e_n\rangle$. Si on prend $V_n := \mathrm{Vect}\,\{e_j, -n \leq j \leq n\}$, alors $\pi_{V_n}(f)(x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j(f)e^{ijx} =: S_n(f)(x)$, la n-ième somme de Fourier. Dans ce cadre l'Identité de Parseval devient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |c_j(f)|^2.$$

6. Applications

6.1. **Formule sommatoire de Poisson.** Supposons qu'on ait une fonction f telle qu'il existe $C, \delta > 0$ tels que $|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\delta}$ et $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-1-\delta}$. C'est vrai en particulier si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais dans bien d'autres cas.

Alors la série $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$ converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ (exercice). On note sa somme $\tilde{f}(x)$. Clairement, $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x)$. On peut donc définir des coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ par rapport à la base hilbertienne $\{e^{2\pi inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ (notez que nous avons changé de normalisation par rapport à l'exemple 5.34).

Théorème 6.1 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\tilde{f}(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi inx}.$$

Si on définit les coefficients de Fourier d'une fonction périodique de période 1 par $c_n(g) := \int_0^1 g(x)e^{-2\pi inx}dx$, alors la formule dit que $c_n(\tilde{f}) = \hat{f}(n)$, et que $\tilde{f}$ est la somme de sa série de Fourier.

Démonstration. La série dans le côté droit de l'égalité converge normalement grâce a l'hypothèse de décroissance de $\hat{f}$. On a donc deux fonctions continues et périodiques de période 1 ; pour démontrer qu'elles sont identiques, il suffit de montrer que leurs coefficients de Fourier sont égaux, c'est-à-dire que $\hat{f}(n) = \int_0^1 \tilde{f}(x)e^{-2\pi inx}dx$. Or par convergence uniforme sur l'intervalle $[0,1]$,

$$\begin{aligned} c_n(\tilde{f}) = \int_0^1 e^{-2\pi inx} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x+j)dx &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{-2\pi inx} f(x+j)dx \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 e^{-2\pi in(x+j)} f(x+j)dx. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $x' := x+j$:

$$c_n(\tilde{f}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_j^{j+1} e^{-2\pi inx'} f(x')dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi inx'} f(x')dx = \hat{f}(n).$$

□

Cette formule se généralise au cas d'une fonction f de période $T > 0$. Il suffit de poser $g(y) := f(Ty)$, alors g est de période 1. On sait que $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{T}\hat{f}(\frac{\xi}{T})$, et on calcule

$g(\frac{x}{T}+n) = f(x+nT)$. L'énoncé du théorème se traduit donc en :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i \frac{n}{T} x}. \tag{8}$$

On peut en tirer des conséquences dans deux directions. Si f est une fonction à support compact, on peut choisir T assez grand pour que f soit nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Alors le membre de gauche dans (8) n'a qu'un terme non nul, et on obtient

$$f(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i \frac{n}{T} x}.$$

On peut ainsi reconstruire f à partir de sa transformée de Fourier d'une façon plus facile qu'avec une intégrale.

Vue la symétrie des hypothèses entre f et $\hat{f}$, en utilisant la formule d'inversion de Fourier, on voit que si $\hat{f}$ est à support compact contenu dans $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, on obtient

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{T}\right) e^{-2\pi i \frac{n}{T} x}.$$

Remarque 6.2. On n'arrivera jamais à une formule exacte avec une somme finie, car le seul cas où f et $\hat{f}$ ont simultanément un support compact est quand $f \equiv 0$. Voyons une idée du pourquoi : si f est à support contenu dans $[-A, +A]$ et bornée, alors, en posant $t = x + A$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-A}^{A} e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx = e^{2\pi i A \xi} \int_{0}^{2A} e^{-2\pi i \xi t} f(x) dx.$$

On peut considérer $\xi \in \mathbb{C}$, et dès que $\operatorname{Im} \xi \geq 0$, $|e^{-2\pi i \xi t} f(x)| \leq |f(x)|$, donc l'intégrale est convergente et sa valeur est une fonction holomorphe bornée de ξ dans le demi-plan supérieur. Mais puisque $\hat{f}$ est nulle en dehors d'un intervalle borné, elle s'annule sur tout un intervalle de la droite réelle, qui est le bord de son domaine d'existence. On peut montrer (par des méthodes de la théorie des fonctions holomorphes qui dépassent le niveau du cours de deuxième année) que dans ce cas la fonction holomorphe doit être identiquement nulle, donc $\hat{f}$, et donc f aussi. Ce raisonnement peut s'étendre au cas où $f \in L^2(-A, A)$ (plutôt que d'être bornée).

6.2. **Principe d'incertitude de Heisenberg.** (résumé)

Théorème 6.3. *Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Alors*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Avec des changements de variables faciles, on voit que pour tout $x_1, \xi_1 \in \mathbb{R}$,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_1)^2 |\psi(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi-\xi_1)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Quand $x_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x)|^2 dx$, $\xi_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} \xi|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$, cela s'interprète comme le produit des variances de la position et de l'impulsion (en mécanique quantique).

6.3. **Equation de la chaleur.** On se place dans un fil sans épaisseur qui transmet la chaleur, qu'on assimile à la droite réelle. En prenant des unités appropriées, si $u(t,x)$ représente la température au point x et au temps t, la fonction u satisfait l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{9}$$

On suppose aussi que la distribution de température initiale est donnée par $u(0,x) = f(x)$, une fonction connue. On veut savoir quelle sera l'évolution de la température en chaque point, pour tous les temps $t > 0$.

Voyons d'abord ce qui se passe sous des hypothèses favorables. Nous allons supposer pour l'instant que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et que pour tout t fixé, $u(t,\cdot)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, uniformément en t, c'est-à-dire que les constantes qui interviennent dans les majorations des dérivées ne dépendent pas de t.

On va prendre la transformée de Fourier de l'équation (9) par rapport à x. On note

$$\hat{u}(t,\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} u(t,x) dx.$$

Alors la Proposition 3.3 implique que

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2 \hat{u}(t,\xi).$$

D'autre part, comme $\left|e^{-2\pi i x\xi}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right| \leq C(1+|x|)^{-2}$ avec une constante indépendante de t (conséquence des hypothèses sur les dérivées), on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale (Théorème 1.4), et

$$\left(\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}\right)(t,\xi) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi).$$

Finalement, pour chaque ξ fixé, (9) implique que la fonction $U(t) := \hat{u}(t,\xi)$ vérifie l'équation $U'(t) = -4\pi^2\xi^2 U(t)$, et donc $U(t) = U(0)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$, autrement dit

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}(0,\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t} = \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}.$$

Pour calculer $u(t,x)$, il reste à appliquer la transformée de Fourier inverse, le produit se transforme en convolution et on trouve $u(t,x) = f * H_t(x)$, où, en appliquant le fait que la gaussienne $G(x) := e^{-\pi x^2}$ est invariante par transformée de Fourier et la Proposition 3.3, on trouve l'expression du Noyau de la Chaleur (comme la notation H l'indique)

$$H_t(x) = \left(e^{-\pi(2\sqrt{\pi t}\xi)^2}\right)^{\widehat{}}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\pi(\frac{x}{2\sqrt{\pi t}})^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Après ces considérations heuristiques, nous aimerions avoir un résultat un peu plus général.

Théorème 6.4. *Soit f une fonction continue, bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $u(t,x) = f * H_t(x)$. Alors*

(1) $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ *et* $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ *pour* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$;
(2) $\lim_{t\to 0, t>0} u(t,x) = f(x)$, *uniformément pour* $x \in [-A, A]$, *quel que soit* $A > 0$;
(3) $\lim_{t\to 0, t>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x) - f(x)|^2 \, dx = 0$.

Démonstration. Nous ne démontrerons pas (1) en toute généralité, nous nous bornerons aux dérivées dont nous avons besoin pour l'équation. Nous nous plaçons dans le domaine $t \in]\delta, A[$, $x \in]-A, A[$ avec $0 < \delta < A < +\infty$. En changeant les valeurs de δ et de A ceci nous permet de traiter tous les points de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

La fonction H_t est continue, bornée et intégrable, donc le Corollaire 4.23 montre que $\hat{u}(t,x) = \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$, qui est une fonction intégrable. D'après les propriétés du produit de convolution, u est continue et absolument intégrable en x. Donc

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}e^{2\pi i x\xi}d\xi.$$

On peut calculer les dérivées de u par rapport t en dérivant sous l'intégrale car

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}e^{2\pi i x\xi}\right)\right| = \left|\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}(-4\pi^2\xi^2)e^{-4\pi^2\xi^2 t}\right| \leq 4\pi^2\xi^2 e^{-4\pi^2\xi^2\delta}|\hat{f}(\xi)|,$$

et comme $|\hat{f}(\xi)|$ est bornée, c'est une fonction absolument intégrable de ξ qui ne dépend pas de t. On trouve donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}e^{2\pi i x\xi}d\xi.$$

Les dérivées de u par rapport à x se calculent en utilisant la Proposition 3.3, car $\xi^2\hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$ est absolument intégrable (toujours grâce à la décroissance de l'exponentielle et au fait que $\hat{f}$ est bornée). Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi i\xi)^2\hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}e^{2\pi i x\xi}d\xi,$$

et on a le résultat voulu.

Pour démontrer (2), il suffit de voir que $(H_t)_{t>0}$ est une unité approchée. Or nous l'avons vu dans la section 4.2 pour $K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}}$, et il suffit de poser $\delta = 4\pi t$.

Pour démontrer (3), grâce à l'identité de Plancherel, il suffit d'étudier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{u}(t,\xi) - \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \left| e^{-4\pi^2\xi^2 t} - 1 \right|^2 d\xi.$$

Or f étant bornée et absolument intégrable, on voit facilement que $|f|^2$ est intégrable, donc $|\hat{f}|^2$ est aussi intégrable d'après l'extension à L^2 que nous avons faite de la transformée de Fourier, et donc comme $|\hat{f}(\xi)|^2 \left| e^{-4\pi^2\xi^2 t} - 1 \right|^2 \leq 4|\hat{f}(\xi)|^2$ et que $\left| e^{-4\pi^2\xi^2 t} - 1 \right|^2 \to 0$ quand $t \to 0$, on peut appliquer le théorème de Convergence Dominée.

On peut aussi se ramener au cas où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ en approximant f et en utilisant le fait que $\|f * H_t\| \leq \|f\| \int H_t = \|f\|$, cf. Feuille de TD 3, exercice 2.1 (3). Ceci permet d'éviter d'invoquer l'espace L^2. $\square$

On a une solution, mais on aimerait savoir qu'il n'y en a pas d'autres. On va le montrer, sous des hypothèses assez fortes.

Théorème 6.5. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, bornée, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Soient u_1 et u_2 deux solutions de* (9) *telles que pour $i = 1, 2$, $u_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $u_i(0, x) = f(x)$, et pour tout $T > 0$, $k, l \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{\substack{0<t<T \\ x\in\mathbb{R}}} \left| x^k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^t u_i(t,x) \right| < +\infty$$

(autrement dit $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, uniformément en $t \in]0, T[$). Alors $u_1 = u_2$.

Démonstration. Si on considère $u := u_1 u_2$, on a une nouvelle solution de (9) avec des valeurs au bord identiquement nulles, qui vérifie toutes les autres hypothèses. Il reste à montrer que $u \equiv 0$. Si on pose $E(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x)|^2 dx$, on a clairement $E(0) = 0$, $E(t) \geq 0$, donc si on arrive à montrer que c'est une fonction décroissante de t, on aura qu'elle est nulle, et donc u aussi.

Or, grâce aux hypothèses sur u (qu'on pourrait affaiblir), en utilisant $|u|^2 = u\bar{u}$,

$$E'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\bar{u}(t,x) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(t,x)u(t,x) \right) dx$$

ce qui donne en appliquant (9), puis en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)\bar{u}(t,x) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}(t,x)u(t,x) \right) dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right) dx \\
&= -2\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(t,x) \right|^2 dx \leq 0.
\end{aligned}$$

□

Remarquons que ce calcul peut être fait avec n'importe quelle distribution initiale de températures f, et donne dans ce cas que $E(t)$, étant décroissante, admet une limite quand $t \to +\infty$. Si E admet aussi une limite, elle devra être nulle, et donc on devrait avoir $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \to 0$, ce qui correspond à l'intuition physique d'une distribution uniforme de température à l'équilibre. On peut le vérifier en utilisant les propriétés du noyau de la chaleur.

6.4. **Fonctions harmoniques.**

Définition 6.6. Une fonction $u(x,y)$ est dite *harmonique* si elle satisfait l'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Théorème 6.7. *Si une fonction est harmonique et bornée sur le demi-plan supérieur ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, continue sur le demi-plan supérieur fermé $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, et que ses valeurs sur la droite réelle sont données par $u(x,0) = u_0(x)$, alors $u(x,y) = u_0 * P_y(x)$, où la convolution est prise par rapport à la variable x et P_y est le noyau de Poisson :*

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Pour finir, on montre que les fonctions harmoniques vérifiaient le principe du maximum (tout comme les modules de fonctions holomorphes).