Université Paul Sabatier
L2 Parcours Spécial – Année 2019-2020
Intégration

FEUILLE 3 : Suites de fonctions

Exercice 1 : Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions définies sur $[0,1]$ et déterminer la fonction limite si elle existe.

1. $f_n(x) = \dfrac{nx + x^3}{n^2}$
2. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$
3. $f_n(x) = x^n$
4. $f_n(x) = n^\alpha x e^{-2nx}$ avec $\alpha \geq 0$
5. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$
6. $f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx}$
7. $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-x}$
8. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx^2+3)}{\sqrt{n+2}}$
9. $f_n(x) = n(1-x)^n \sin(\dfrac{\pi x}{2})$

Exercice 2 : Convergence et dérivation

1. Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f dérivable et constater que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$. Montrer que chaque f_n est de classe C^1 et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe C^1.

Exercice 3 : Convergence uniforme et intégration
Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer
$$\int_0^1 f_n(t)dt$$
Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Exercice 4 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ nx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 1 & \text{si } x > \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

1. Faire une figure pour quelques valeurs de n.
2. Déterminer la limite de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini.
3. Préciser si la convergence est uniforme dans les trois cas suivants
   — sur $]-\infty, 0]$.
   — sur un segment contenant l'origine.
   — sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 5 : *Fonction Γ

Soit $f_n(x) = \dfrac{n^x}{(1+x)(1+x/2)\cdots(1+x/n)}$.

1. Etudier la convergence simple des fonctions f_n sur $[0, +\infty[$.
2. On note $f = \lim f_n$. Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. (on calculera $f_n'(x)/f_n(x)$)

Exercice 6 : *Considérer la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}[\\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite des fonctions f_n converge simplement $[0, +\infty[$ vers la fonction f ;
2. A l'aide de la suite des fonctions f_n, calculer l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ (Indication : utiliser le fait que l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt$ est équivalente à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$).

Exercice 7 : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $f_n = f^{(n)}$ (dérivée n-ème). On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers φ. Que peut-on dire de φ ?