Université Paul Sabatier — Année 2019-2020
L2 Parcours Spécial
Intégration

FEUILLE 2 : Séries Numériques

Exercice 1 : Déterminer à l'aide d'équivalents, la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+\alpha n}$ avec $\alpha < 2$
3. $\dfrac{a^n}{1+b^n}$, $a, b > 0$
4. $\cos\left(\dfrac{\pi^2 n^2}{2n^2+an+1}\right)$ avec $a > 0$

Exercice 2 : Montrer la convergence et calculer la somme des séries de terme général :

1. $\dfrac{9}{(3n+1)(3n+4))}$, $n \geq 1$
2. $\ln(1-\dfrac{1}{n^2})$, $n \geq 2$
3. $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \geq 1$

Exercice 3 : Déterminer à l'aide de la règle de Cauchy ou de la règle d'Alembert ou d'équivalents, la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$, $n \geq 2$
2. $\dfrac{n!}{n^n}$, $n \geq 1$
3. $n^n a^{n^2}$, $a > 0$
4. 2^{-n^a} , $a \geq 1$
5. $e^{-\sqrt{n}}$, $n \geq 1$
6. $\dfrac{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}{3\times 6\times\cdots\times 3n}$, $n \geq 1$
7. $\dfrac{(n+1)\times\cdots\times(n+n)}{2^n n^n}$, $n \geq 1$
8. $\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$, $n \geq 1$
9. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $n \geq 1$
10. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$, $n \geq 1$
11. $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$, $n \geq 2$

Exercice 4 : Étudier la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{\sin n^2}{n^2}$, $n \geq 1$
2. $\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$, $n \geq 1$
3. $\dfrac{(-5)^n}{n}$, $n \geq 1$
4. $\ln\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \geq 2$

$*$ 5. $\sin\left(2\pi\dfrac{n!}{e}\right)$, $n \geq 1$ (indications : $\frac{1}{e}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$)

Exercice 5 : Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général $\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$, $n \geq 1$, soit convergente et calculer dans ce cas la somme de la série.

Exercice 6 :

— Représenter la courbe de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ pour $x \geq 2$

— Interpréter $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^2}$ comme la somme d'aires de rectangles. En déduire que $S_n \leq \displaystyle\int_2^n f(x)dx$.

— Montrer que la série de terme général $\frac{1}{k(\ln k)^2}$, $k \geq 3$ converge.

Exercice 7 : Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. Etudier les séries

$$\sum a_n^2 \qquad \sum \frac{a_n}{1+a_n} \qquad \sum a_n a_{2n} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$$