TD n$^{\mathrm{o}}$ 3 : Équations différentielles

***Exercice* 3.1.** **1.** Résoudre l'équation homogène

$$x' - 3x = 0. \tag{H}$$

2. On considère l'équation différentielle

$$x' - 3x = 3. \tag{E}$$

a. Trouver une solution particulière de l'équation.
b. En déduire toutes les solutions à valeurs réelles de (E).
c. Déterminer la solution qui vérifie la condition initiale $x(0) = 0$

3. Mêmes questions avec l'équation

$$x' - 5x = e^{2t}.$$

4. Mêmes questions avec l'équation

$$x' - 5x = t - 1$$

(on pourra chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 1).

***Exercice* 3.2.** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :
1. $x' + x = te^{-t}$ avec $x(0) = 1$.
2. $x' + x = (t^2 + 1)e^t$ avec $x(0) = 0$.

***Exercice* 3.3.** Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $xy'(x) - y(x) = 0$ sur $]0, \infty[$ avec $y(1) = 2$;
2. $y'(x) - xy(x) = 0$.

***Exercice* 3.4.** Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $xy' + y = \frac{1}{1+x}$ sur $]0, +\infty[$;
2. $(1 + x)y' + 2y = x$ (préciser sur quel intervalle).
3. $y' - y\cos(x) = \cos(x)$ avec $y(0) = 1$;
4. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$;
5. $y' + (6t + \frac{1}{t})y = 1$ sur $]0, +\infty[$.
6. $(t+1)y' + ty = t^2 - t + 1$ sur $]-1, +\infty[$ (*indication : chercher une solution particulière sous forme polynomiale.*)

***Exercice* 3.5.** Résoudre
1. $2y' + y = xe^{-x}\cos x$
2. $y' - y\cos(x) = \sin(2x)$ avec $y(0) = 1$;

***Exercice* 3.6.** Résoudre les équations différentielles d'ordre 2 suivantes.
1. $y'' - 2y' + y = e^t(6t + 2)$;
2. $y'' - 4y' + 4y = 12t^2e^{2t}$.
3. $y'' - y = -6\cos(x) + 2x\sin(x)$;
4. $4y'' + 4y' + 5y = \sin(t)e^{t/2}$;
5. $(1 + t)^2y'' + (1 + t)y' - 2 = 0$ sur $]-1, +\infty[$ *(indication : on pourra se ramener à une équation d'ordre 1)* ;

***Exercice* 3.7.** En faisant le changement d'inconnue $z(t) = \frac{y(t)}{t}$, résoudre l'équation différentielle

$$t^2y'' - 2ty' + (2 - t^2)y = 0.$$

***Exercice* 3.8.** En utilisant la technique de séparation des variables, résoudre les équations différentielles non linéaires suivantes (en précisant les intervalles) :
1. $y' = y^2t$
2. $y' = e^{x+y}$
3. $y' = \frac{8y+4}{x^2-4}$. (Pour celle-ci, on vérifiera que $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$).