Université Paul Sabatier – Toulouse III- L1 Parcours Spécial MATHS
Contrôle Terminal, 9 Janvier 2020 (2 heures).

Avertissements : Les exercices sont indépendants les uns des autres. Les documents et les calculatrices sont interdits. La clarté de la rédaction et la qualité des justifications seront prises en compte dans la notation.

Question de cours.

Énoncer le théorème des accroissements finis, et l'illustrer par une figure.

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$A_n = \left]\tfrac{1}{n}, 2 + \tfrac{1}{n}\right[.$$

(1) L'intersection des intervalles A_n est par définition l'ensemble
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \geq 1, x \in A_n\}.$$
Sur le même modèle, écrire la définition de l'union des intervalles A_n, que l'on cherche à déterminer dans les questions suivantes.

(2) Montrer l'inclusion $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \subset]0, 3[$.

(3) Montrer l'inclusion $]0, 3[\subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, et conclure.

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle suivante sur $]-\infty, 0[$:
$$y'(t) - \cos(t)y(t) = \frac{e^{\sin t}}{t} \qquad (E)$$

(1) Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée à (E).

(2) Donner toutes les solutions de l'équation (E).

(3) Déterminer la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(-1) = 0$.

Exercice 3.

(1) Écrire les développements limités à l'ordre n en 0 des fonctions
$$x \mapsto \cos x \quad \text{ et } \quad x \mapsto \sin x,$$
en expliquant rapidement comment on les obtient à partir de la formule de Taylor.

(2) Calculer la limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

Exercice 4.

(1) Calculer sous forme polaire les racines carrées z_1 et z_2 du nombre complexe $w = e^{i\frac{\pi}{6}}$, et placer ces trois nombres complexes sur une figure.

(2) Mettre $w = e^{i\frac{\pi}{6}}$ sous forme algébrique, et calculer ses racines carrées z_1 et z_2 sous forme algébrique.

(3) En déduire une expression de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5.

On considère le polynôme suivant :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1.$$

(1) Montrer que 1 est racine de P. Déterminer son ordre de multiplicité.

(2) En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

(3) Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(X)}$ sur $\mathbb{C}$.

(4) Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(X)}$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Question de cours.

Théorème des accroissements finis :

Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

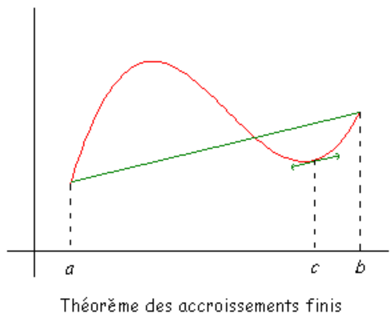

Figure 1

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$A_n = \left]\tfrac{1}{n}, 2+\tfrac{1}{n}\right[.$$

(1) L'union des intervalles A_n est par définition l'ensemble
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \geq 1, x \in A_n\}.$$

(2) Soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Par définition, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $x \in A_n = \left]\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[$. On a donc la suite d'inégalités
$$0 < \frac{1}{n_0} < x < 2 + \frac{1}{n_0} \leq 3$$
On en déduit $x \in]0,3[$, ce qui prouve l'inclusion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset]0,3[$.

(3) Soit $x \in]0,3[$. On distingue deux cas.

Si $1 < x < 3$, alors $x \in A_1 =]1,3[$.

Si $0 < x \leq 1$, alors on choisit un entier n_0 suffisamment grand pour que $n_0 > \frac{1}{x}$. On a donc
$$\frac{1}{n_0} < x \leq 1 < 2 + \tfrac{1}{n_0},$$
d'où $x \in A_{n_0}$.

Dans les deux cas on a montré que x appartient à au moins l'un des A_n, ce qui prouve l'inclusion $]0,3[\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

En conclusion, on a une égalité $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n =]0,3[$.

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle suivante sur $]-\infty, 0[$:

$$y'(t) - \cos(t)y(t) = \frac{e^{\sin t}}{t}. \qquad (E)$$

(1) L'équation homogène associée est

$$y'(t) - \cos(t)y(t) = 0. \qquad (H)$$

On sait que les solutions sont de la forme $y_H(t) = Ce^{A(t)}$, avec $C \in \mathbb{R}$ et $A(t)$ une primitive de $\cos(t)$. On peut prendre $A(t) = \sin(t)$, et on trouve l'ensemble des solutions pour (H) :

$$\{Ce^{\sin t} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

(2) On cherche une solution particulière y_P de l'équation (E) par la méthode de la variation de la constante : on cherche $y_P(t)$ sous la forme $y_P(t) = C(t)e^{\sin t}$. On a donc

$$\begin{aligned} y_P'(t) &= C'(t)e^{\sin t} + C(t)\cos(t)e^{\sin t} \\ y_P'(t) - \cos(t)y_P(t) &= e^{\sin t}(C'(t) + C(t)\cos(t) - C(t)\cos(t)) \\ &= C'(t)e^{\sin t} \end{aligned}$$

On en déduit que $C'(t) = \frac{1}{t}$, une primitive est donc $C(t) = \ln(-t)$ (car on travaille sur les réels négatifs !)

En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{(C + \ln(-t))e^{\sin t} + \mid C \in \mathbb{R}\}$$

(3) Si $y(t) = (C + \ln(-t))e^{\sin t}$, on a $y(-1) = (C + \ln(1))e^{\sin 1} = Ce^{\sin 1}$. Or $e^{\sin 1} > 0$, donc $y(-1) = 0$ si et seulement si $C = 0$, et donc $y(t) = \ln(-t)e^{\sin t}$.

Exercice 3.

(1) On pose $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$ suivant si l'ordre souhaité n est pair ou impair. On a

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p}) \end{aligned}$$

On obtient ces développements limités en appliquant la formule de Taylor en 0, qui pour une fonction f suffisamment de fois dérivables s'écrit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

On applique cette formule à $\cos x$ et $\sin x$ en remarquant $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.

(2) En utilisant le DL à l'ordre 2 de $\cos x$ et le DL à l'ordre 3 de $\sin x$ on écrit

$$x\cos x - \sin x = x(1 - \frac{x^2}{2}) - (x - \frac{x^3}{6}) + o(x^3) = x^3(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}) + o(x^3) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On en déduit la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{3} + o(1) = -\frac{1}{3}.$$

Exercice 4.

(1) Les racines carrées de $w = e^{i\frac{\pi}{6}}$ sont

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad z_2 = -e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{13i\frac{\pi}{12}}$$

Figure :

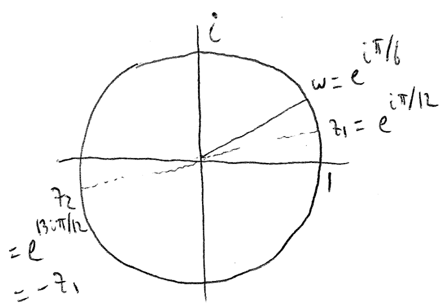

Figure 2

(2) On a $w = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

Cherchons les racines carrées sous la forme $z = x + iy$. On a $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. En identifiant partie réelle, partie imaginaire et module (au carré) on obtient le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 - y^2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2xy &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit que x et y sont de même signe avec

$$\begin{cases} x^2 &= \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y^2 &= \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

et donc finalement deux solutions :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\Big(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\Big) \text{ et } z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i\Big(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\Big)$$

(3) En identifiant les parties imaginaires de z_1 dans les deux questions précédentes on conclut $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 5.

On considère le polynôme suivant :

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1.$$

(1) On calcule

$$P(1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0$$

Par ailleurs $P'(X) = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 2$, $P''(X) = 12X^2 - 12X + 4$ et donc

$$P'(1) = 4 - 6 + 4 - 2 = 0 \quad \text{et} \quad P''(1) = 12 - 12 + 4 = 4 \neq 0.$$

On conclut que 1 est une racine de P de multiplicité 2.

(2) On commence par mettre $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$ en facteur de P :

$$X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + 1)$$

On en déduit que

$$P = (X-1)^2(X^2+1)$$

est la décomposition en facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}$, et que

$$P = (X-1)^2(X+i)(X-i)$$

est la décomposition en facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{C}$.

(3) Sur $\mathbb{C}$, la forme de la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(X)}$ est

$$\frac{1}{(X-1)^2(X+i)(X-i)} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{C}{X-i} + \frac{D}{X+i}$$

On trouve successivement :

- $C = \frac{1}{4}$ (multiplier par $X - i$ et évaluer en $X = i$)
- $D = \frac{1}{4}$ (multiplier par $X + i$ et évaluer en $X = -i$. On peut aussi dire que c'est le conjugué de C.)
- $B = \frac{1}{2}$ (multiplier par $(X-1)^2$ et évaluer en $X = 1$)
- $A = -(C + D) = -\frac{1}{2}$ (multiplier par $(X-1)$ et faire $X \to \infty$)

(4) Sur $\mathbb{R}$, la forme de la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(X)}$ est

$$\frac{1}{(X-1)^2(X+i)(X-i)} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{EX+F}{X^2+1}$$

On peut trouver $E = \frac{1}{2}$ et $F = 0$ à partir de la décomposition sur $\mathbb{C}$, en écrivant

$$\frac{C}{X-i} + \frac{D}{X+i} = \frac{\frac{1}{4}(X+i) + \frac{1}{4}(X-i)}{X^2+1} = \frac{\frac{1}{2}X}{X^2+1}$$

Autre façon pour trouver E et F : multiplier par X^2+1 et évaluer en $X = i$: on trouve

$$\frac{1}{(i-1)^2} = Ei + F$$

et $\frac{1}{(i-1)^2} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$.