Rappel : Séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue et T-périodique avec $T > 0$. Les coefficients de Fourier de f sont :

$$c_n(f) \doteq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-\frac{2\pi i n t}{T}}\, dt \quad , \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La Série de Fourier de f est :

$$f(t) \doteq \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{2\pi i n t/T}$$

et la N-ième somme partielle de la Série de Fourier de f est :

$$S_N(f) : t \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{2\pi i n t/T}$$

Si f est à valeurs réelles on a :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{N} b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

avec $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \forall n \geq 0$

et $b_n(f) = i c_n(f) - i c_{-n}(f) \quad \forall n > 0.$

ce qui conduit à poser, pour $n \geq 0$:

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad \text{et}$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt.$$

Si f est à valeurs réelles, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour les coéfficients $c_n(f)$.

On a de plus que f est paire si et seulement si tous les $b_n(f)$ sont nuls, et f est impaire si et seulement si tous les $a_n(f)$ ~~non~~ sont nuls.

Propriétés des coefficients de Fourier :

On a :

* $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
* si $g(t) = f(-t)$ on a $c_n(g) = c_{-n}(f)$; en particulier si f est paire $c_{-n}(f) = c_n(f)$, et si f est impaire $c_{-n}(f) = -c_n(f)$.
* si $g(t) = f(t+a)$, alors $c_n(g) = e^{\frac{2\pi i n a}{T}} c_n(f)$
* si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $c_n(f') = \frac{2\pi i n}{T} c_n(f)$.
* si f est $\mathcal{C}^\infty$, alors $c_n(f^{(k)}) = \left(\frac{2\pi i n}{T}\right)^k c_n(f)$.

Nous allons vouloir étudier l'analogue des coéfficients de Fourier pour un signal non périodique, à priori défini sur toute la droite réelle, qu'on va supposer d'énergie finie, et, dans un premier temps représenté par une fonction f absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

Première idée : approximer f par $f_{|[-T/2, T/2]}$ avec $T > 0$ très grand, et traiter cette restriction comme une fonction périodique de période T.

Les coéfficients de Fourier de $f_T \doteq f_{|[-T/2, T/2]}$ sont :

$$c_{n,T}(f) \doteq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt.$$

Si f est suffisamment régulière, ces coéfficients vont décroître rapidement et on pourra donc écrire f comme ~~sa~~ somme de sa série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{n,T}(f) e^{2\pi i n t/T} \quad (1)$$

Si on pose donc :

$$\hat{f}(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt \quad (*)$$

on peut ré-écrire la formule (1) comme :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)}_{= c_{n,T}(f)} e^{2\pi i n \frac{t}{T}} \qquad (2)$$

En faisant tendre T vers l'infini, et en utilisant les sommes de Riemann et la décroissance des coefficients, on peut montrer donc que (2) tend vers

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i \xi t}\, d\xi \leftarrow \text{Quan}$$

Nous allons rendre cette "procédure" plus précise pour obtenir cette formule de "reconstruction" de f à partir de sa transformée $\hat{f}$ pour ~~des~~ classes des fonctions assez larges.

(*) <u>Rappel</u> : <u>Intégrales impropres</u> :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

On pose : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(t)\,dt$ si cette limite existe

f est dit <u>intégrable sur $[a, +\infty[$</u> si la limite existe (finie).

f est <u>absolument intégrable</u> si $|f|$ est intégrable

<u>NB</u> : f absolument intégrable $\Rightarrow$ f intégrable, mais la réciproque est fausse.

Analoguement on peut définir $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$.

f est <u>intégrable sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$</u> si f est à la fois intégrable sur $[a, +\infty[$ <u>et</u> sur $]-\infty, a]$ (parfois on déco en plusieurs intervalles ; les intervalles bornés ne posent pas des problèmes)

Suite sur les Séries de Fourier.

Taille des Coefficients de Fourier

Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et T-périodique. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|\, dt.$$

Donc la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée. En fait on a plus que ça :

Prop : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et T-périodique, alors

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0.$$

Corollaire : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et T-périodique et de classe C^k, alors : $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ quand $n \to \pm\infty$.

De plus, si f est C^∞, alors ~~~~ $\forall \alpha \geq 0$

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ quand } n \to \pm\infty.$$

Convergence d'une Série de Fourier

Étant donnée une suite de nombres complexes $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nous voulons déterminer quand la suite des fonctions $S_N \doteq \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n t}$ est convergente et, si c'est le cas, quand les c_n sont des coefficients de Fourier de la limite.

Nous nous rappelons que :

Déf : Si (f_n) est une suite des fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un même ensemble X, la série de terme général f_n converge normalement sur X s'il existe une suite $(u_n) \subseteq \mathbb{R}$ t.q.

(i) $\forall n$, $|f_n| \leq u_n$ sur X

(ii) $\sum_n u_n$ converge.

Nous avons donc :

Proposition : Si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ est telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$, alors la suite

$$S_N(t) \doteq \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n t}$$

converge normalement vers une limite $f(t)$.

De plus, la limite $f(t)$ est continue et $c_n(f) = c_n \; \forall n \in \mathbb{Z}$

Si la suite des dérivées $\sum_{n=-N}^{N} 2\pi i n \, c_n \cdot e^{2\pi i n t}$ converge normalement vers g, alors la suite $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n t}$ converge normalement vers f avec $f \in \mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Rmq : Nous avons vu que la série de Fourier de la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ vérifie :

$$c_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{(2k+1)\pi i} & \text{si } n = 2k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad c_0(f) = \frac{1}{2}$$

et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = +\infty$. Donc dans ce cas nous n'avons pas une série convergente.

Il se peut aussi que f soit continue et que sa série de Fourier ne converge pas normalement ou même ne converge pas.

Convergence de la série de Fourier d'une fonction continue

Produit de convolution.

Commençons par manipuler les sommes partielles de la série de Fourier pour les écrire dans une forme plus simple à manipuler :

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{i\omega n x} \quad \text{où} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\omega n t}\, dt \right) e^{i\omega n x}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{i\omega n(x-t)} \right) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, D_N(x-t)\, dt = (f * D_N)(x)$$

où $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{i\omega n t}$

ceci nous amène naturellement à la notion suivante :

Déf : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions continues et T-périodiques, le produit de convolution de f par g est la fonction :

$$f * g\,(x) \doteq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, g(x-t)\, dt.$$

Proposition : Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et T-périodiques.

Alors :

(i) $f * g$ est continue et T-périodique

(ii) $f * g = g * f$

(iii) L'application $h \mapsto f * h$ est une application linéaire de l'esp. des fonctions continues T-périodiques dans lui-même.

(iv) Si $e_n(x) \doteq e^{i\omega n x}$, on a $f * e_n = c_n(f)\, e_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

(v) $c_n(f * g) = c_n(f)\, c_n(g)$.

Corollaire. Si $P = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\omega x}$ est un ~~polynôme~~ polynôme trigonométrique, alors $f * P$ est également un polynôme trigonométrique.

Unité approchée

Déf. Une unité approchée des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ T-périodiques est une suite (h_n) de fonctions positives ($h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$) continues et T-périodiques, telles que :

(i) ~~pour~~ $\forall\, 0 < \delta < \frac{T}{2}$ et $\forall\, \varepsilon > 0$ on a

$$0 \leq h_n(x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in [\delta, T-\delta] \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

(ii) $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h_n(t)\,dt = 1 \quad \forall n.$

Exemple (voir TD) Pour $N \geq 0$ posons

$$h_N(t) \doteq \frac{1}{A_N} \cos^{2N}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \text{ avec } A_N \doteq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos^{2N}\left(\frac{\pi t}{T}\right) dt.$$

Rmq : d'après l'exo 2(6) de la Feuille de TD sur les Séries de Fourier, on a que les noyaux de Dirichlet ne sont pas une ~~identité~~ unité approchée.

Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et T-périodique et soit (h_n) une ~~iden~~ unité approchée. Alors la ~~la~~ suite $(f * h_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon > 0$ t.q. $|f * h_n - f| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$ sur $\mathbb{R}$.

Théorèmes de Convergence :

Théorème de Weierstraß :

Toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodique peut être approchée par des polynômes trigonométriques.

Preuve :

Posons $h_N(t) = \frac{1}{A_N} \cos^{2N}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ avec $A_N = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^{2N}\left(\frac{\pi t}{T}\right) dt$.

D'après l'exo 4 de la feuille de TD la suite (h_N) est une unité approchée donc $h_N * f \to f$ uniformément.

De plus h_N est un polynôme trigonométrique pour tout N

$\Rightarrow h_N * f$ est un polynôme trigonométrique.

Comme (D_N) n'est pas une unité approchée, une fonction continue T-périodique n'est pas nécessairement la somme de sa série de Fourier. Nous avons cependant le résultat suivant :

Théorème (Dirichlet) :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, f est la somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$$

où $f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t)^{(*)}$ et $f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)^{(*)}$

(*) ~~cettes~~ ces limites existent car f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exemple d'Application :

Considérons la fonction ~~f~~ ~~égale~~ $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$ et prolongée par périodicité sur $\mathbb{R}$. Nous avons (voir TD)

$$c_0(f) = \frac{\pi}{2}, \quad c_{\pm 2n}(f) = 0 \quad \forall n \geq 1, \quad c_{\pm(2n+1)}(f) = -\frac{2}{\pi(2n+1)^2} \quad \forall n \geq 0.$$

On a donc

$$\pi = f(\pi) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n \geq 0} \frac{2}{\pi(2n+1)^2}$$

et on a pû en déduire que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

À la fin du 19ème siecle, l'italien Césàro à l'idée de "rendre convergentes des suites divergentes" (u_n) en considérant les moyennes arithmétiques :

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

Si par exemple on applique ce procédé à $(u_n) = \{(-1)^n\}$ on a que $v_n \to 0$.

Si $u_n \to \ell$ on a que $v_n \to \ell$.

Si nous appliquons le procédé de Cesàro à $(S_N(f))$, nous obtenons :

$$T_N(f) \doteq \frac{1}{N}\left(S_0(f) + \cdots + S_{N-1}(f)\right) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e^{niwt}$$

$$= \frac{1}{N}\left(f * D_0 + \cdots + f * D_{N-1}\right) = f * F_N$$

où

$$\boxed{F_N \doteq \frac{1}{N}\left(D_0 + D_1 + \cdots + D_{N-1}\right)}$$ Noyaux de Fejer.

Théorème de Féjer

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et T-périodique. Alors les sommes de Féjer

$$T_N(f) \doteq \frac{1}{N}\left(S_0(f) + \cdots + S_{N-1}(f)\right) = f * F_N$$

convergent vers f.

"Preuve": La suite des noyaux de Féjer est une unité approchée (voir TD).

Formule de Parseval :

Le cadre naturel pour étudier les séries de Fourier est celui des fonctions T-périodiques non nécessairement continues, mais qui sont de carré intégrable sur une période :

$$\int_0^T |f(t)|^2 \, dt < +\infty.$$

On peut munir cet espace d'un produit scalaire.

$$\langle f, g \rangle \doteq \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

Alors pour $n \in \mathbb{Z}$, les exponentielles

$$e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{i\omega n t} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

forment une famille orthonormale car en effet on a

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(n-m)\omega t} \, dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Si f est une fonction T-périodique continue, et J est une partie finie de $\mathbb{Z}$, alors le projeté orthogonal de f sur l'espace vectoriel engendré par $\{e_j\}_{j\in J}$ est donné par :

$$\sum_{j\in J} c_j(f) e_j \quad \text{avec } c_j(f) = \langle f, e_j \rangle$$

Donc $S_N(f)$ est le projeté ortogonal de f sur

$$\mathrm{Vect}(e_{-N}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_N).$$

La densité des polynômes trigonométriques nous permet donc d'établir la généralisation en dim infinie suivante du théorème de Pythagore :

Théorème [Formule de Parseval]

Pour toute fonction f T-périodique et de carré intégrable sur une période on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Lemme de Riemann - Lebesgue :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Alors

$$\lim_{n\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = \lim_{n\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = \lim_{n\to\pm\infty}\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx = 0.$$

~~Intégrable sur $\mathbb{R}$~~

<u>Définition</u>: Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes. La <u>transformée de Fourier de f</u> est:

$$\hat{f}(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt.$$

Parfois on notera $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.

<u>Remarque</u>: $\left| f(t)\, e^{-2\pi i \xi t} \right| = |f(t)|$, donc

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty.$$

De plus, $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$.

<u>Opérations de base</u>

<u>Proposition</u>: Soit f telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge. Alors:

(1) $\forall h \in \mathbb{R}$, si $g(x) = f(x+h)$ on a

$$\mathcal{F}(f(x+h)) = \hat{g}(\xi) = e^{2\pi i \xi h}\, \hat{f}(\xi).$$

(2) $\forall \delta \in \mathbb{R}_+$, en posant $g(x) = f(\delta x)$ on a

$$\mathcal{F}(f(\delta x)) = \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\delta}\, \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$$

(3) $\mathcal{F}\left(e^{-2\pi i x h} f(x)\right) = \hat{f}(\xi + h)$

(4) Si f est dérivable <u>et</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\, dx < +\infty$ alors

$$\mathcal{F}(f'(x)) = 2\pi i\, \xi\, \hat{f}(\xi).$$

(5) Si de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|\, dx < +\infty$, on a

$$\mathcal{F}(-2\pi i x f(x)) = \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi).$$

<u>Preuve</u>:

(1) $$\mathcal{F}(f(x+h))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+h)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+h)\, e^{-2\pi i \xi (t+h)}\, e^{2\pi i \xi h}\, dt$$

$$= e^{2\pi i \xi h}\, \hat{f}(\xi).$$

(2) $\mathcal{F}(f(\delta x))(\xi) = \hat{g}(\xi)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt$$

on change variable : $x = \delta t$, $dx = \delta dt$, $\boxed{\delta > 0}$

et on obtient :

$$\mathcal{F}(f(\delta x))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \frac{\xi}{\delta} x}\, \frac{dx}{\delta}$$

$$= \frac{1}{\delta}\, \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$$

(3) $\mathcal{F}(e^{-2\pi i x h} f(x))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t h} f(t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i (\xi + h) t}\, dt$$

$$= \hat{f}(\xi + h).$$

(4) $\mathcal{F}(f'(x))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt$

on intègre par parties : $u = e^{-2\pi i \xi t}$ $\quad u' = -2\pi i \xi e^{-2\pi i \xi t}$

$v = f(t)$ $\quad v' = f'(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) v'(t)\, dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt.$$

Problème : ici on a $a = -\infty$ et $b = +\infty$!

Mais : si f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et f tend vers une limite à l'infini, alors cette limite doit être 0,

donc $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$ dans notre cas, ce qui nous donne :

$$\mathcal{F}(f'(x))(\xi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[-2\pi i \xi e^{-2\pi i \xi t}\right] dt$$

$$= +2\pi i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt$$

$$= 2\pi i \xi \hat{f}(\xi).$$

(5) $$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt$$

Nous aimerons ici dériver sous l'intégrale.
Ceci n'est pas toujours possible mais ça l'est dans nôtre cas grâce au théorème suivant :

Théorème (Dérivation sous l'intégrale)

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $(x,t) \longmapsto f(x,t)$, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalles, une fonction continue par morceaux en x et intégrable sur I pour t fixé ; continûment dérivable en t pour x fixé.

On suppose qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que pour tout $t \in J$ et pour tout $x \in I$ on a $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leq g(t)$.

Alors :
$$\frac{d}{dt}\int_I f(x,t)\, dx = \int_I \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, dx.$$

Dans nôtre cas :

$$g(t,\xi) = f(t) e^{-2\pi i \xi t}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} g(t,\xi) = f(t) e^{-2\pi i \xi t} \cdot (-2\pi i t) = -2\pi i e^{-2\pi i \xi t} t \cdot f(t)$$

et nous savons par hypothèse que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\, t|\, dt < +\infty$$

donc nous pouvons appliquer le théorème :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} f(t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, (-2\pi i t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt$$

$$= \mathcal{F}\left(-2\pi i x\, f(x)\right)(\xi).$$

$\boxtimes$

Rmq : À part le facteur $2\pi i$, la transformée de Fourier ~~transforme~~ échange la différentiation et la multiplication par x.

Cette propriété clé rend la transformée de Fourier un des objets centraux dans la théorie des équations différentielles, comme on verra dans la suite.

Transformée de Fourier - premières propriétés suite

Théorème (Lemme de Riemann - Lebesgue)

Si f est continue et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ est continue et $\lim_{|\xi| \to \infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0$.

Idée de la preuve:

Par hypothèse, pour $A \in \mathbb{R}$ $A > 0$ assez grand $\int_{|x| \geq A} |f(x)|\, dx$ est petite.

Nous savons que

$$|\mathcal{F}(f(\xi))| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt .$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > 0$ tq.

$$\left| \mathcal{F}(f \cdot \mathbb{1}_{]-\infty, A[\cup]A, +\infty[})(\xi) \right| \leq \varepsilon \quad \forall \xi$$

où $\mathbb{1}_{]-\infty, -A[\cup]A, +\infty[} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-\infty, -A[\cup]A, +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Donc on peut se ramener à une fonction à support borné, $f \cdot \mathbb{1}_{[-A, A]}$

Continuité : on estime $|\mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(f)(\xi + h)|$ grâce au fait que $\mathcal{F}(f)(\xi + h) = \mathcal{F}(e^{-2\pi i x h} f(x))(\xi)$.

Pour montrer que $\lim_{|\xi| \to \infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0$ on utilise l'uniforme continuité(*) de $f \mathbb{1}_{[-A, A]}$ et on approche f par une fonction en escalier, car la transformée de Fourier d'une fonction en escalier est explicite et est petite à l'infini. Sinon on peut approximer f par une fonction $\mathcal{C}^1$, dont on voit que la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini en faisant une intégration par parties et en utilisant $\mathcal{F}(f'(x)) = 2\pi i \xi f$

$\square$

Déf. Une fonction f est uniformément continue sur un ensemble I si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tq. $\forall x, y \in I$ tq. $|x-y| < \delta$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Rmq: cela ressemble à la déf. de la continuité, et cela implique la continuité ordinaire, mais c'est plus fort. La différence est que d'habitude δ dépend de x (et de ε), alors qu'ici δ ne dépend que de ε. (et sur I).

Exemple:

* $f(x) = ax+b$ est unif. cont. sur $\mathbb{R}$ et il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$
* $f(x) = x^2$ est unif. cont. sur $[-1, 1]$ (il suffit $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ par ex) mais n'est pas unif cont. sur $\mathbb{R}$

$\left(\forall \delta > 0 \text{ donné, si } x \geq \frac{1}{\delta} \text{ alors } \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 > x+1\right)$

Théorème de Heine:

Toute fonction continue sur un intervalle borné et fermé est uniformément continue

Espace de Schwartz, inversion, convolution.

Espace de Schwartz :

Nous allons nous placer dans un espace qui est stable par les deux opérations de base que sont la multiplication par la variable x et la dérivation.

Nous allons voir que la transformation de Fourier envoie cet espace dans lui-même. En effet nous aurons que c'est une bijection et une isométrie dans un sens qu'on définira plus avant.

On note par $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions indéfiniment et continûment dérivables.

Déf. L'espace de Schwartz est défini par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \doteq \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall k, n \in \mathbb{N},\ x^n f^{(k)}(x) \text{ est bornée sur}$$

Rmq. Cette définition implique aussi que $\forall k, n \in \mathbb{N}$ la fonction $x^n f^{(k)}(x)$ tend vers zéro à l'infini et est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ [voir TD].

Proposition : Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $x f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Preuve :

Il suffit voir que la fonction $\xi^n \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \mathcal{F}(f)(\xi)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Or, nous avons :

$$\xi^n \left(\frac{d}{d\xi}\right)^k \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left((-2\pi i x)^k f(x) \right) \right)(\xi)$$

qui est donc bornée.

Gaussiennes et identités approchées

Proposition La fonction Gaussienne $G(x) \doteq e^{-\pi x^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\hat{G}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$, c-à-d la gaussienne coïncide avec sa transformée de Fourier.

Preuve:

Pour montrer que $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on montre par récurrence que $G^{(k)}(x) = P_k(x) e^{-\pi \xi^2}$ où P_k est un polynôme de degré borné par k.

Pour calculer la transformée de Fourier de G, posons $F(\xi) = \hat{G}(\xi)$. On a:

$$F'(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x F(x))(\xi)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi x} (-2\pi i x) e^{-\pi x^2} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} i e^{-2\pi i \xi x} G'(x)\, dx = i(2\pi i \xi) \hat{G}(\xi) = -2\pi \xi F(\xi)$$

On a donc une éq. diff. pour F : $F' = -2\pi \xi F(\xi)$ et on sait que $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$.
La solution est unique et vaut $F(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$.

Notons que si nous posons $G_\delta(x) \doteq e^{-\pi \delta x^2}$ pour $\delta > 0$, alors:

$$\hat{G}_\delta(\xi) = \mathcal{F}(G(\delta^{1/2} x))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \hat{G}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}} \doteq K_\delta(\xi)$$

et $\hat{K}_\delta = G_\delta$.

Déf: Une famille de fonctions $(\rho_\delta)_{\delta > 0}$ est une identité approchée si et seulement si:

(i) $\rho_\delta(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\delta(x) dx = 1$

(ii) $\forall \eta > 0$ $\lim_{\delta \to 0} \int_{|x| > \eta} \rho_\delta(x)\, dx = 0$.

Proposition : La famille $K_\delta(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}}$ est une identité approchée

preuve : voir TD.

Tout comme pour les séries de Fourier, nous allons avoir besoin ici aussi d'un $\boxed{\text{produit de convolution}}$

Déf : Soit g une fonction absolument intégrable, c-à-d. $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty$ et soit f une fonction bornée, c-à-d. $\exists M_f > 0$ t.q. $|f(x)| \leq M_f \; \forall x \in \mathbb{R}$.

On pose :

$$f * g(x) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt.$$

Proposition : Si $(\rho_\delta)_{\delta > 0}$ est une identité approchée et si f est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{\delta \to 0} f * \rho_\delta(x) = f(x)$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Rmq : Si f est continue et $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$, alors f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (exercice)

Corollaire :

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\lim_{\delta \to 0} (f * K_\delta)(x) = f(x)$ unif sur $\mathbb{R}$ où $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta}$.

idée de la preuve de la proposition :

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\delta(t)\, dt = 1$ on a :

$$|f * \rho_\delta(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x)) \rho_\delta(t) dt \right|$$

$$\leq \int_{|t| \geq \eta} |f(x-t) - f(x)| |\rho_\delta(t)| dt + \int_{|t| \leq \eta} |f(x-t) - f(x)| |\rho_\delta(t)| dt$$

Par uniforme continuité, on prend $\eta > 0$ suffisamment petit pour que pour $|t| \leq \eta$ on ait
$|f(x-t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donc :

$$|f * \rho_\delta(x) - f(x)| \leq \int_{|t| \geq \eta} |f(x-t) - f(x)| \rho_\delta(t) dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

Maintenant avec η fixé, on prend δ petit tq.

$$\int_{|t| \geq \eta} \rho_\delta(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$$

On a alors :

$$|f * \rho_\delta(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} \cdot 2\|f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Formule d'inversion.

Proposition (Formule de multiplication)

Soient f, g absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) g(y) dy$$

Rmq : les intégrales sont absolument convergentes, car f est absolument intégrable et $\hat{g}$ est bornée, et viceversa.

Corollaire : $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) g(y) dy.$$

Preuve : Posons $F(x,y) \doteq f(x) g(y) e^{-2\pi i x y}$. Alors
$|F(x,y)| = |f(x)||g(y)|$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)| dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \right) dy$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \right)$$

Donc on peut utiliser le résultat suivant :

Théorème : Soient I et J deux intervalles (non néc. bornés) de $\mathbb{R}$. Supposons que :

(i) La fonction $F(\cdot, y)$ est absolument intégrable sur I pour tout $y \in J$;

(ii) la fonction $y \mapsto \int_I |F(x,y)| dx$ est intégrable sur J.

Alors la fonction $x \mapsto \int_J |F(x,y)| dy$ est intégrable sur I et on a :

$$\int_J \left(\int_I F(x,y) dx \right) dy = \int_I \left(\int_J F(x,y) dy \right) dx$$

On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dy = f(x)\hat{g}(x)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dx = \hat{f}(y) g(y)$.

et donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) g(y)\, dy.$$

La formule de multiplication plus le fait que la Gaussienne est sa propre transformée de Fourier nous donnent la formule d'inversion.

Théorème (formule d'inversion de Fourier)

Si f et $\hat{f}$ sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

Preuve:

Nous utilisons $K_\delta(x) = \hat{G}_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}}$.

Grâce à la parité de K_δ on a:

$$f * K_\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) K_\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K_\delta(-x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K_\delta(x) dx.$$

Grâce à la formule de multiplication on a:

$$f * K_\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{G}_\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) G_\delta(y) dy$$

On sait, de plus, que $\lim_{\delta \to 0} f * K_\delta(0) = f(0)$ et que $\lim_{\delta \to 0} G_\delta(y) = 1$. On veut passer la limite "à l'intérieur de l'intégrale".

On a $|G_\delta(y) - 1| \leq \pi \delta A^2$ pour $|y| \leq A$.

[car $|e^{-x} - 1| \leq x$ pour tout $x \geq 0$].

Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit A suffisamment grand t.q.

$$\int_{|y| \geq A} |\hat{f}(y) G_\delta(y)| dy \leq \int_{|y| \geq A} |\hat{f}(y)| dy < \frac{\varepsilon}{4}$$

D'autre part on a, une fois A fixé,

$$\left| \int_{-A}^{A} \hat{f}(y) dy - \int_{-A}^{A} \hat{f}(y) G_\delta(y) dy \right| \leq \int_{-A}^{A} |\hat{f}(y)| \, |1 - G_\delta(y)| dy$$

$$\leq \pi \delta A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)| dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $\delta > 0$ assez petit.

Donc $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, dy$.

Pour démontrer le cas général, on pose $f_x(t) \doteq f(x+t)$.

On applique ce qu'on vient de montrer à cette fonction de t, en se rappelant que $\hat{f}_x(\xi) = e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi)$ et on trouve

$$f(x) = f_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_x(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}\, d\xi.$$

Nous avons donc établi que:

la transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition:

Soit $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ la transformée de Fourier. On a que $\mathcal{F}$ est bijective ~~L'application~~ avec inverse $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}^*(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{2\pi i \xi x}\, d\xi.$$

Preuve:

On sait déjà que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Le théorème précédent montre que toute fonction f de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ~~et~~ est la transformée de Fourier ~~d'une~~ d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

En fait: en posant $\check{f}(x) \doteq f(-x)$ on trouve:

$$\mathcal{F}(\check{f}(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{2\pi i x' \xi}\, dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-2\pi i(-\xi)x'}\, dx' = \hat{f}(-\xi)$$

Donc $f = \mathcal{F}((\hat{f})^\vee)$ et $\mathcal{F}$ est surjective.

Si $\hat{f} = \hat{g}$, en appliquant la transformée de Fourier à $(\hat{f})^\vee = (\hat{g})^\vee$

on retrouve bien $f=g$, donc $\mathcal{F}$ est bijective sur $\mathcal{J}(\mathbb{R})$.

Formule de Plancherel :

Théorème : Soient $f, g, \hat{f}$ et $\hat{g}$ absolument intégrables.

Alors :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi.$$

En particulier, si $f=g$, on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Preuve : On utilise le fait que $\overline{\int f} = \int \overline{f}$ et on voit que $\mathcal{F}(\overline{\hat{g}})(x) = \overline{g(x)}$ (à travers la formule d'inversion pour g). Donc, grâce à la formule de multiplication :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathcal{F}(\overline{\hat{g}})(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$$

Nous pouvons munir $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ d'un produit hermitien :
$$\langle f, g\rangle \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$
dont la norme associée sera :
$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

et on obtient comme corollaire que

Corollaire : La transformée de Fourier est une isométrie sur $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ pour la norme $\|f\| \doteq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$.

preuve :

le théorème nous donne $\|f\| = \|\hat{f}\|$.

Propriétés du produit de convolution.

Proposition : Soient f et g deux fonctions bornées et absolument intégrables. Alors $f * g = g * f$.

preuve :

Pour x fixé, on fait le changement de variable $u = x - t$.

On a :

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)\, g(x-u)\, (-du) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, du$$

$$= g * f(x).$$

~~On a aussi : (voir TD).~~

~~Proposition : Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors :~~

~~(i) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$~~

~~(ii) $f * g = g * f$~~

~~(iii) $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi)$.~~

~~preuve : exo.~~

Théorème.

Soient f, g deux fonctions bornées t.q. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx$ converge. On suppose que f est dérivable et sa dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors $f * g$ est dérivable et

$$\frac{d}{dx}(f*g)(x) = f' * g(x).$$

preuve : Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale. D'après les hypothèses on a :

$$|f'(x-t)\, g(t)| \leq \left(\sup_{\mathbb{R}} |f'|\right) |g(t)| \qquad \forall x, t \in \mathbb{R}.$$

donc on a ~~...~~ l'hypothèse de domination ~~...~~ par une fonction intégrable indépendante de x, ce qui ~~...~~ implique que $f*g$ est dérivable et :

$$\frac{d}{dx}(f*g)(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x-t)\,g(t)\,dt = f'*g(x)$$

Transformée de Fourier d'une convolution.

Théorème : Soient f et g absolument intégrables et bornées. Alors

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi).$$

Preuve :

On veut appliquer le théorème de Fubini pour changer l'ordre dans l'intégrale double :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} f(x-t)\,g(t)\,dt\,dx.$$

On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-2\pi i x\xi} f(x-t)\,g(t)\right| dt\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|\,dx\,dt$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt\right) < +\infty$$

On a donc :

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,e^{-2\pi i x\xi}\,dx\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,e^{-2\pi i t\xi}\,\hat{f}(\xi)\,dt = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi).$$

Corollaire : Si $f, g, \hat{f}, \hat{g}$ sont absolument intégrables, alors $\mathcal{F}(fg)(\xi) = \cancel{(\hat{f} * \hat{g})(\xi)} . (\hat{f} * \hat{g})(\xi)$

Preuve :

On note d'abord que $\hat{f}\hat{g}$ est absolument intégrable car $\hat{f}$ est absolument intégrable et $\hat{g}$ est bornée.

D'autre part, si u et v sont ~~abs~~ absolument intégrables et bornées, alors $\check{u} * \check{v} = (u * v)^{\vee}$ (où $\check{u}(x) = u(-x)$).

En fait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(-(x-t))\, v(-t)\, dt \overset{t'=-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} u(-x-t')\, v(t')\, dt = (u*v)(-x).$$

D'après la feuille de TD on a que $f*g$ est absolument intégrable car f et g le sont.

Donc, grâce au théorème sur la transformée de Fourier d'un produit de convolution, on a :

$$\mathcal{F}((\hat{f} * \hat{g})^{\vee}) = \mathcal{F}((\hat{f})^{\vee} * (\hat{g})^{\vee}) = \mathcal{F}((\hat{f})^{\vee}) \cdot \mathcal{F}((\hat{g})^{\vee}) = fg$$

d'après le théorème d'inversion.

En appliquant la transformée de Fourier des deux côtés puis le théorème d'inversion au premier terme on trouve bien $\hat{f} * \hat{g} = \mathcal{F}(fg)$.

Espaces de Hilbert

Nous avons vu que la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ joue le rôle d'une norme au carré pour l'espace des fonctions, qui est de dimension infinie.

Nous allons voir un aperçu de la théorie des espaces de Hilbert, qui généralisent la notion ~~des~~ d'espace euclidien dans le cas de dimension infinie.

Comme on ne ~~peut~~ peut pas trouver de base finie, la convergence des suites peut être problématique, ce qui conduit à une notion différente de base, celle de base hilbertienne.

Ils nous font d'abord des rappels d'algèbre linéaire.

Rappel : Produit Hermitien

Déf : Soit E un esp. vectoriel sur $\mathbb{C}$. On produit hermitien (ou scalaire, ou intérieur) est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$, qui à une couple de vecteurs x, y associe le scalaire $\langle x, y \rangle$, telle que :

(i) $\forall y \in E$, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire

(ii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

On appelle norme d'un vecteur le réel positif

$$\|x\| \doteq \langle x, x \rangle^{1/2}$$

La distance entre deux vecteurs x, y est donnée par $\|x - y\|$

Exemples :

(i) $E = \mathcal{C}([a,b])$ $\quad \langle f, g \rangle \doteq \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$

(2) $E = \mathbb{C}[X]_{\mathbb{R}} \doteq$ l'esp. des polynômes à coefficients complexes de variable réelle.

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X)\,\overline{Q(X)}\, e^{-x^2}\, dx.$$

(3) $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\, dx.$

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Preuve.

Soit $x, y \in E$. Pour tout $t, \theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leq \langle x + te^{i\theta} y, x + te^{i\theta} y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\,\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle \cdot t^2$$

On choisit θ tq $e^{-i\theta}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$.

Donc $t^2\langle y, y\rangle + 2t\,|\langle x, y\rangle| + \langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ce qui nous dit que le discriminant de ce polynôme est ≤ 0, c'est-à-dire

$$4\,|\langle x, y\rangle|^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$$

d'où le résultat. ■

Comme corollaire, nous obtenons que la distance définie ci-dessus vérifie l'inégalité triangulaire

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

et par conséquent aussi : $\|x - y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|$.

Rmq : Il existe de nombreuses normes qui n'ont pas toutes les bonnes propriétés des normes provenantes d'un produit scalaire.

Une propriété qui caractérise les normes provenantes d'un produit scalaire est la suivante.

Théorème. (Identité du parallélogramme)

Une norme provient d'un produit scalaire si et seulement si:

$\forall x, y \in E \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$

Exercise: montrer que si $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ où $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire, alors

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in E.$$

Une autre propriété importante est la suivante.

Théorème (Unicité de la projection)

Soit E un esp. vectoriel sur $\mathbb{C}$ avec un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Soit $V \subseteq E$ un sous-esp. vectoriel et $x_0 \in E$. S'il existe $y_0 \in V$ qui réalise la plus courte distance de x_0 à V, c'est-à-dire

$$\|x_0 - y_0\| = \min_{y \in V} \|x_0 - y\|,$$

alors y_0 est unique et est le seul vecteur $y \in V$ t.q. $x_0 - y$ soit orthogonal à V, c-à-d

$$\langle x_0 - y, z\rangle = 0 \quad \forall z \in V.$$

De plus, si $(p_n)_n \subset V$ avec $\lim_{n\to\infty} \|p_n - x\| = \inf_{p \in V} \|x - p\|$, i.e. $(p_n)_n$ est une suite minimisante, alors la suite est de Cauchy.

Le vecteur y_0 est appelé projection (orthogonale) de x_0 sur V.

Attention : Ce résultat nous dit seulement que si la projection existe, alors elle est unique, mais il se peut bien qu'aucune projection n'existe.

Exemple :

Prenons E l'esp. des fonctions continues par morceaux (et donc bornées) sur $[-1, 1]$, avec $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ et soit V le sous-esp. des fonctions continues sur $[-1, 1]$. Alors la fonction $f_0 = \chi_{[0,1]}$ n'a pas de projection sur V, parce que nous pouvons approcher f_0 d'aussi près qu'on veut avec des fonctions continues, donc sa projection "devrait" être elle même, mais $f_0 \notin V$.

Preuve du théorème :

~~Soit~~ Soient $p_0, p_1 \in V$ et $x_0 \in E$. Grâce ~~seule~~ à l'identité du parallélogramme, si on pose $x = p_0 - x_0$ et $y = p_1 - x_0$ on a :

$$\|p_0 - x_0 + p_1 - x_0\|^2 + \|p_0 - \cancel{x_0} - p_1 + \cancel{x_0}\|^2 = 2\|p_0 - x_0\|^2 + 2\|p_1 - x_0\|^2$$

c'est-à-dire :

$$\|p_0 + p_1 - 2x_0\|^2 = 2\|p_0 - x_0\|^2 + 2\|p_1 - x_0\|^2 - \|p_0 - p_1\|^2.$$

et en divisant par 4 on a :

$$\left\|\frac{p_0+p_1}{2} - x_0\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|p_0 - x_0\|^2 + \|p_1 - x_0\|^2\right) - \frac{1}{4}\|p_0 - p_1\|^2$$

En particulier, si $m \doteq \operatorname{dist}(x_0, V) \doteq \inf_{p \in V} \|x_0 - p\|$ et $\delta > 0$, ~~est~~ pour tout p_0, p_1 t.q. $\|p_0 - x_0\|^2 \leq m^2 + \delta$ et $\|p_1 - x_0\|^2 \leq m^2 + \delta$ on a :

$$\|p_0 - p_1\|^2 = 2\left(\|p_0 - x_0\|^2 + \|p_1 - x_0\|^2 - 2\left\|\frac{p_0+p_1}{2} - x_0\right\|^2\right) \leq 2m^2 + 2\delta - 2m^2$$
$$\leq 2\delta.$$

Ceci implique que :

(i) Si la borne inférieure est atteinte par p_0 et p_1, ~~p_0~~ i.e.
$m = \|p_0 - x_0\| = \|p_1 - x_0\| \Rightarrow p_0 = p_1$.

(ii) toute suite minimisante est une suite de Cauchy car il suffit de remplacer p_0, p_1 par des éléments p_n, p_m de la suite, avec $n, m \geq N$ où N est tq. $\|p_s - x\| \leq m + \frac{\varepsilon^2}{2}$ $\forall s \geq N$.

Pour montrer les affirmations sur l'orthogonalité :

S'il existe $y_0 \in V$ tq.

$$\langle x_0 - y_0, z\rangle = 0 \quad \forall z \in V,$$

alors $\forall y \in V$, $y - y_0 \in V$ et donc

$\langle x_0 - y_0, y - y_0\rangle = 0$ et par Pythagore

$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x_0 - y_0\|^2$ ce qui montre que y_0 réalise la plus courte distance.

Réciproquement, si y_0 réalise la plus courte distance, $\forall z \in V$ $\forall t, \theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\|x_0 - y_0\|^2 \leq \|x_0 - y_0 + te^{i\theta} z\|^2 = \|x_0 - y_0\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\langle x - y_0, z\rangle) + t^2\|z\|^2$$

L'expression à droite est minimale pour $t=0$ donc sa dérivée doit s'annuler pour $t=0$, i.e.

$$\mathrm{Re}(e^{-i\theta}\langle x - y_0, z\rangle) = 0 \quad \forall \theta$$

$\Rightarrow \langle x - y_0, z\rangle = 0 \quad \forall z.$ ∎