Université Paul Sabatier S6, Année 2016–2017
L3 ESR, Analyse Complexe

Feuille TD 3

Exercice 1. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Pour tout $a \in \mathbb{D}$ posons

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

(1) Montrer que φ_a et une bijection qui applique le cercle unité sur le cercle unité, $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et a en 0.

(2) Montrer que la fonction réciproque de φ_a est φ_{-a} et qu'on a

$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2 \quad \text{et} \quad \varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

(3) Soit $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique, bijective avec réciproque analytique. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda\varphi_a(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, où $a \in \mathbb{D}$ est tel que $f(a) = 0$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\overline{\mathbb{D}}$, et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur Ω et non-constante. On suppose que $f(0) = 1$ et que $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f possède au moins un zéro dans $\mathbb{D}$.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 4. Soit f une fonction continue sur le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$, analytique sur le disque ouvert $D(0, 1)$ et nulle sur le demi-cercle $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Montrer que f est nulle. *Indication : on pourra considérer* $g(z) = f(z)f(-z)$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité et $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^*$ une fonction analytique continue jusqu'au bord. Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$, il existe deux nombres complexes distincts $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}$ tels que $|f(z_0)| = |f(z_1)| = |f(z_2)|$.

Exercice 6. Soit $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{e^z + e}\right)$.

(1) Quel est le plus grand ouvert U sur lequel f est holomorphe ?

(2) Trouver les zéros de f.

(3) Montrer que cet ensemble possède un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7. (1) Démontrer que les opérateurs différentiels complexes $\partial_z := \frac{\partial}{\partial z}$ et $\partial_{\bar{z}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ vérifient la règle de Leibnitz et qu'ils sont conjugés dans le sens suivant : si f est une fonction différentiable sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ alors $\overline{\partial_z f} = \partial_{\bar{z}}\overline{f}$, et $\overline{\partial_{\bar{z}} f} = \partial_z\overline{f}$.

(2) En déduire que si f et $\bar{f}$ sont holomorphes sur Ω, alors f est constante sur Ω.

(3) Démontrer que si $h\colon D \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 (au sens réel) sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$, alors $\partial_z\partial_{\bar{z}}h = (1/4)\Delta h$ sur D, où Δ est l'opérateur de Laplace usuel sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que si f est holomorphe et de classe C^2 sur D, alors $u := \Re e f$ et $v := \Im m f$ sont harmoniques sur D i.e. $\Delta u \equiv 0$ et $\Delta v \equiv 0$ sur D.

(4) Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et f, g des fonctions holomorphes sur Ω. Vérifier que $\partial_z\partial_{\bar{z}}\big(f\overline{g}\big) = f'\overline{g'}$.

(5) Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions holomorphes (de classe C^2) sur Ω. On pose $h := |f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$. Calculer Δh. Que peut-on en déduire si la fonction $|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ est constante sur Ω ?

(6) A quelles conditions sur les fonctions f_k $(1 \leq k \leq n)$, la fonction $h := |f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ est harmonique sur Ω ?