Feuille TD 2

Exercice 1. Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide.

(1) Montrer que les seules fonctions analytiques définies sur Ω et à valeurs dans $i\mathbb{R}$ sont les constantes.

(2) Soit f et g deux fonctions analytiques dans le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. On suppose que g ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$ et que $f(z)\overline{g(z)} \in i\mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = ic\, g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Exercice 2. Trouver toutes les fonctions holomorphes f telles que :

(1) $\mathrm{Re}(f(z)) = C$, où C est une constante,

(2) $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 + x - y^2$,

(3) $\mathrm{Re}(f(z)) = \cos x$.

Exercice 3. Soit $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(1) Donner une condition nécessaire sur u pour qu'il existe une fonction holomorphe f sur Ω telle que $\Re e f = u$ sur Ω. Cette condition est-elle suffisante en général ?

(2) Déterminer toutes les fonctions holomorphes f (lorsqu'elles existent) telles que $\Re e f = u$ sur Ω dans chacun des cas suivants:

(a) $\Omega = \mathbb{C}$ et $u(x, y) = x - y^2$,

(b) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

(c) $\Omega = \mathbb{C}$ et $u(x, y) = \cos x$.

(d) $\Omega := \{z \in \mathbb{C}; -\pi < \Re e z < +\pi\}$ et $u(x, y) = \frac{sinx}{\cos x + \cosh y}$.

Exercice 4. Calculer l'intégrale des fonctions $f(z) = z^2$ et $g(z) = \frac{1}{z}$ sur le chemin (orienté dans le sens trigonométrique)

$$\Gamma = [\pi/2, \pi/2 + i] \cup [\pi/2 + i, -\pi/2 + i] \cup [-\pi/2 + i, -\pi/2].$$

Exercice 5. Calculer les intégrales curvilignes de $z - \frac{1}{z}$ le long des trois courbes joignant les points $1 - i$ et $1 + i$ en ligne droite ou au long du cercle centré en 0. Comparer les résultats et donner une explication.

Exercice 6. On définit la transformation de Cayley par

$$C(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

(1) Démontrer que est C une transformation holomorphe du demi-plan de Poincaré $\mathbf{H} := \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$ sur le disque unité $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ dont on déterminera la transformation inverse.

(2) Démonter que C est une transformation holomorphe qui envoie la droite $\Im m z = 0$ sur le cercle unité $|w| = 1$.

(3) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $w := C(z)$. Comparer $\bar{w}$ et $w^* := C(\bar{z})$ et interpréter géométriquement la relation obtenue.

Exercice 7. On rappelle que pour tout $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{R}^+)$ il existe un réel unique $\theta(z) \in]-\pi, +\pi[$ tel que $z = |z|e^{i\theta(z)}$. La fonction définie par $\text{Arg } z := \theta(z)$ est appelée la branche principale de la fonction multiforme $argz$ sur le domaine Ω.

(1) Démonter que si $z = x + iy \in \Omega$, on a

$$\text{Arg } z = 2\text{Arctg}\left(\frac{y}{x + |z|}\right).$$

En déduire que Arg est une fonction continue sur Ω et n'admet pas de prolongement continue à $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(2) Démontrer que la fonction définie par $\text{Log}(z) := \ln |z| + i\text{Arg}z$ est continue sur Ω et vérifie l'équation $\exp \text{Log}z = z$ pour tout $z \in \Omega$: on dit que Log est la branche principale du logarithme sur Ω. En déduire que Log est holomorphe sur Ω et calculer sa dérivée.

(3) Donner le développement en série entière de $\text{Log}(z)$ au voisinage de 1 à partir de celui de $1/z$.

Exercice 8. (1) Démontrer que la fonction carré $f : z \longmapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et réalise une transformation de $\mathbb{C}_*$ sur $\mathbb{C}_*$ qui envoie les droites sur des paraboles.

(2) Pour $w \in \mathbb{C}$, résoudre léquation $z^2 = w$. Sur quels domaines la fonction f est-elle bijective et quelle est sa bijection réciproque ? Définir la branche principale de la racine carrée sur le domaine $\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{R}^+)$.

(3) Existe t-il une fonction holomorphe h sur $\mathbb{C}$ telle que $h(z)^2 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?

Exercice 9. On considère la transformation homographique suivante:

$$W(z) := \frac{1 - z}{1 + z}.$$

(1) Démontrer que W est une transformation holomorphe involutive qui laisse invariant l'axe des réels $\Im m z = 0$ et qui échange l'axe des imaginaires purs $\Re e z = 0$ et le cercle unité. Quelle est l'image du disque unité par W ?

(2) Démontrer que la fonction définie par

$$f(z) := \text{Log}\left(\frac{1 - z}{1 + z}\right)$$

est une transformation holomorphe du disque unité $\mathbb{D}$ sur une bande B que l'on déterminera.