Université Paul Sabatier S6, Année 2016–2017
L3 ESR, Analyse Complexe

Feuille TD 1

Exercice 1. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Les fonctions suivantes sont elles holomorphes?

$$z \mapsto \overline{f(z)} \text{ sur } U, \quad z \mapsto \overline{f(\overline{z})} \text{ sur } \overline{U} = \{z \mid \overline{z} \in U\}, \quad z \mapsto f(\overline{z}) \text{ sur } \overline{U}.$$

Exercice 3. Soit D un domaine (i.e. ouvert connexe non vide) de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. Démontrer que si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in D$ alors f est constante sur D. En déduire que si $|f|$ est constante sur D alors f est constante sur D.

Exercice 4. Posons

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Montrer que une fonction f est holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Exercice 5. Soit f une fonctions holomorphe sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. On pose $u := \Re e f$ et $v := \Im m f$.

(1) On suppose que $u = \Re e f(z) \equiv c$ est constante sur Ω. Démontrer que f est constante sur Ω.

(2) On suppose qu'il existe des nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et que pour tout $z = x + iy \in \Omega$,

$$a \cdot u(x, y) + b \cdot v(x, y) + c = 0.$$

Que peut-on dire de f ? Interpréter géométriquement cette condition et appliquer la question précédente.

(3) Même question si on suppose qu'il existe des nombres réels $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$a \cdot u^2(x, y) + b \cdot v^2(x, y) = 1.$$

Exercice 6. (Sommation d'Abel) Soient (u_n), (v_n) des suites de nombres complexes. On pose $S_k^m = v_k + \ldots + v_m$.

(1) Montrer que pour $m < n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = u_m S_m^n + \sum_{k=m+1}^{n} (u_k - u_{k-1}) S_k^n.$$

(2) Si de plus (u_n) est réelle et décroissante vers 0, et que la suite des sommes partielles $\sum_1^k v_n$ est bornée, en déduire que la série de terme général $u_n.v_n$ est convergente.

Exercice 7. Calculer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$$

et montrer que la série converge pour tout z tel que $z \neq 1$ et $|z| = 1$.

Exercice 8. Soit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(1) Montrer que la fonction exp est définie sur $\mathbb{C}$ et continue.
(2) Montrer que la fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et donner sa dérivée.
(3) Démontrer que exp est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ et calculer ses dérivées complexes successives.
(4) Déterminer toutes les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables f sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant l'équation différentielle complexe $f' = af$, où $a \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe fixé. Qu'en est-il si a est une fonction holomorphe sur un domaine de $\mathbb{C}$?
(5) Déterminer l'image par exp des doites horizontales $\Im z = \alpha$ et des droites verticales $\Re z = \beta$ et de $\mathbb{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Démontrer que exp induit un homéomorphisme de la bande $B_\alpha := \{z \in \mathbb{C}; \alpha - \pi < \Im z < \alpha + \pi\}$ sur le domaine $D_\alpha := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{R}^+ \cdot e^{i\alpha})$ et déterminer son homéomorphisme inverse (réciproque) ℓ_α.
(6) Démontrer que ℓ_α est holomorphe sur D_α et caculer sa dérivée. Exprimer ℓ_α à l'aide de la branche principale du logarithme.
(7) Démontrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$:

$$\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \text{ et } \cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Calculer $|\sin z|$ et $|\cos z|$. Les fonctions cos et sin sont-elles bornées sur $\mathbb{C}$?
(8) Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1$.