UNIVERSITE PAUL SABATIER 2016–2017

Analyse Hilbertienne - L3 Spécial Physique

DEVOIR MAISON : A RENDRE LE 7 NOVEMBRE 2016

Exercice I

Montrer que $f(x) = e^{-x^2}$ définit une fonction dans l'espace de Schwartz et en calculer la transformée de Fourier.

Exercice II

On note indifféremment $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ pour la transformée de Fourier d'une fonction.

On cherche à déterminer les *fonctions propres* pour la transformation de Fourier, c'est-à-dire les fonctions f telles que $\hat{f} = \lambda f$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

On rappelle la formule d'inversion de Fourier : si f et $\hat{f}$ sont toutes les deux absolument intégrables, en particulier si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

1. On suppose que f est paire et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Calculer $\mathcal{F}(f + \mathcal{F}(f))$ et $\mathcal{F}(f - \mathcal{F}(f))$.
2. Déterminer les fonctions de la forme $f(x) = \alpha_1 e^{-\pi\delta_1 x^2} + \alpha_2 e^{-\pi\delta_2 x^2}$ qui sont des fonctions propres, où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $\delta_1, \delta_2 > 0$.
3. Soit f une fonction telle que f et $\hat{f}$ sont toutes les deux absolument intégrables. On pose $\breve{f}(x) := f(-x)$. Rappeler ce qu'est $\mathcal{F}(\breve{f})$ en fonction de $\mathcal{F}(f)$. Calculer $\mathcal{F}^2(f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$, puis $\mathcal{F}^4(f)$. Si $\mathcal{F}(f) = \lambda f$, quelles peuvent être les valeurs de λ ?
4. On suppose que f est impaire et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $f + i\hat{f}$ et $f - i\hat{f}$ sont des fonctions propres.
5. On suppose que f est paire et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{F}(f) = \lambda f$. Montrer que $\lambda \in \{+1, -1\}$.
   Que se passe-t-il si f est impaire et propre ?
6. Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Décomposer h en la somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire. Montrer que cette décomposition est unique.
   Décomposer h en une somme de quatre fonctions propres pour la transformée de Fourier. On utilisera $\mathcal{F}^i(h)$, $0 \leq i \leq 3$, avec la convention que $\mathcal{F}^0$ représente l'identité.

Exercice III

On pose, pour tout $\delta > 0$,

$$P_\delta(x) := \frac{1}{\pi\delta} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + x^2}.$$

Notez que P est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose $e(x) := e^{-|x|}$, on rappelle que $\hat{e}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$.

1. Trouver la valeur de $\delta > 0$ telle que $\hat{e}(\xi) = P_\delta(\xi)$.
2. En déduire de quelle fonction $P_1(\xi)$ est la transformée de Fourier, puis grâce à la formule d'inversion, la valeur de $\hat{P}_1(\xi)$.
3. Calculer $\hat{P}_\delta(\xi)$ pour un $\delta > 0$ quelconque.
4. En utilisant la formule qui donne la transformée de Fourier d'un produit de convolution, calculer $\mathcal{F}(P_{\delta_1} * P_{\delta_2})$ pour $\delta_1, \delta_2 > 0$. En déduire la valeur de $P_{\delta_1} * P_{\delta_2}(x)$.