TD 4. Projections, Bases Hilbertiennes

1. Orthogonal d'un sous-espace et densité

Soit E un espace vectoriel à coefficients complexes, avec un produit intérieur noté $\langle x, y\rangle$. La norme est donnée par $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$. Nous rappelons quelques définitions.

Rappels.
Si $A \subset E$, on appelle *orthogonal* de A l'ensemble

$$A^{\perp} := \{x \in E : \forall y \in A, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

On voit immédiatement que si $A \subset B$, $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. On montre que $A^{\perp}$ est toujours un espace vectoriel (même si A est un ensemble quelconque) et que $A \cap A^{\perp} = \{0\}$.
Si E est de dimension finie, $(A^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect} A$ (sous-espace vectoriel engendré par A).

On dit qu'un ensemble A est *fermé* si pour toute suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède une limite x (c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$), alors $x \in A$.
Plus généralement, on appelle *adhérence* de A, et on note $\overline{A}$, l'ensemble de toutes les limites de suites convergentes contenues dans A. C'est un ensemble fermé qui contient A (en fait, c'est le plus petit possible).
On dit qu'un ensemble A est *dense* dans E si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède pour limite x. Autrement dit, $\overline{A} = E$.

Exercice 1. Pour tout sous-ensemble $A \subset E$, montrer que $A^{\perp}$ est fermé (indication : Cauchy-Schwarz).

Exercice 2. On va montrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{A}$.

(1) Montrer que pour tout sous-ensemble $A \subset E$, $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$. Déduire de l'exercice précédent que $\overline{A} \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
(2) Réciproquement, si $v \in E$, dans quel sous-espace doit être $v - p_{\overline{A}}(v)$? Si $v \in (A^{\perp})^{\perp}$, montrer que $\langle v - p_{\overline{A}}(v), v - p_{\overline{A}}(v)\rangle = 0$ et en déduire que $v \in \overline{A}$.
(3) Corollaire : A est dense dans E si et seulement si $A^{\perp} = \ldots$?

Exercice 3. On considère $E := \mathcal{C}[-1, 1]$, muni du produit intérieur $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$. On appelle W le sous-espace des fonctions constantes.

(1) Montrer que W est fermé.
(2) Montrer que $W^{\perp} = \{f \in E : \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$.
(3) Soit $f \in E$. Quelle est la projection de f sur W ? Sur $W^{\perp}$?
(4) Mêmes questions avec P qui est le sous-espace des fonctions paires.

Exercice 4. Dans le même espace E, on pose $V := \{f \in E : f(0) = 0\}$. Soit $g(x) = 1$, pour tout $x \in [-1,1]$. Montrer que $g \notin E$, mais que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in E$ telle que $\|f - g\| < \varepsilon$. En déduire qu'il n'existe pas de projection de g sur V, et que V n'est pas fermé.

Exercice 5. On considère un espace vectoriel E muni d'un produit intérieur. On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{C}$. Une forme linéaire φ est continue si et seulement si pour toute suite $(f_n) \subset E$ telle que $f = \lim_n f_n$ (au sens de la norme donnée par le produit intérieur), alors $\lim_n \varphi(f_n) = \varphi(f)$.

(1) Si φ est continue, montrez que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous espace vectoriel fermé.
(2) On prend E comme dans l'exercice 3, et $\varphi_0(f) := f(0)$. Montrer que φ_0 est forme linéaire non continue.
(3) On reprend E un espace vectoriel quelconque E muni d'un produit intérieur. Montrer que pour tout $g \in E$, $\varphi_g(f) := \langle f, g\rangle$ définit une forme linéaire continue.
(4) Désormais on suppose que E est un espace de Hilbert, et φ une forme linéaire continue non identiquement nulle. Montrer qu'on peut trouver $g \in (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp}$ telle que $\varphi(g) = \|g\|^2$ (indication : prendre $g_0 \in (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} \setminus \{0\}$, et la multiplier par un scalaire convenable), et que $\{g\}$ est une base de $(\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp}$ (indication : si $f \in (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp}$, trouver λ tel que $\varphi(f - \lambda g) = 0$).
(5) Montrer que pour tout $f \in E$, $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$ (indication : trouver λ tel que $\varphi(f - \lambda g) = 0$ et décomposer $f = (f - \lambda g) + \lambda g$).

Donc, toute forme linéaire continue peut se représenter par un produit intérieur comme dans la question (iii). Ceci s'appelle le *Théorème de représentation de Riesz.*

Exercice 6. Il existe d'autres normes que les normes données par des produits intérieurs. Leurs propriétés de projection ne sont pas aussi bonnes. On va montrer que même quand le sous-espace est fermé, la projection peut ne pas exister. C'est un peu plus compliqué que les exercices précédents.

On prend $E := \{f \in \mathcal{C}[0,1] : f(0) = 0\}$, muni de la norme uniforme, $\|f\|_\infty := \max_{[0,1]} |f|$. On pose $V := \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, et $g(t) = t$.

(1) Montrer que V est fermé au sens de la norme uniforme et que $g \notin V$.
(2) Soit $\beta > 0$. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_{\alpha,\beta}(x) := \max(-\alpha x, x - \frac{1}{2} - \beta)$. Montrer (en utilisant par exemple le théorème des valeurs intermédiaires) qu'il existe une valeur $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ telle que $f_{\alpha(\beta),\beta} \in V$. On posera $f_\beta := f_{\alpha(\beta),\beta}$.
(3) Montrer que $\|g - f_\beta\|_\infty = \frac{1}{2} + \beta$, et donc que $\inf_{f\in V} \|g - f\|_\infty = \frac{1}{2}$.
(4) On va montrer que cette borne inférieure n'est jamais atteinte. On rappelle l'inégalité des accroissements finis : si $h \in \mathcal{C}^1[0,1]$, alors $|h(1) - h(0)| \leq \max_{[0,1]} |h'|$, avec égalité si et seulement si h est une fonction affine (c'est-à-dire que h' est constante).

Soit $f \in V$. On pose $h(x) := \int_0^x g(t) - f(t)dt$. Est-ce une fonction affine ? Calculer $h(1) - h(0)$ et en déduire que $\|g - f\|_\infty > \frac{1}{2}$.

Exercice 7. Voici un exemple d'espace à produit intérieur (qui n'est pas de Hilbert) tiré de l'analyse complexe, qui a des applications (que je ne connais pas) en génie électrique.

Une *fraction rationnelle* est une fonction de la forme $f(z) := P(z)/Q(z)$, où P et Q sont des polynômes à coefficients complexes sans facteur commun (Q n'est pas le polynôme nul). Elle est holomorphe sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

On considère l'espace vectoriel des fractions rationnelles qui n'ont aucun pôle sur le disque unité fermé :

$$RH^2 := \left\{ f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} : Q(z) \neq 0, \forall z : |z| \leq 1 \right\},$$

muni du produit intérieur suivant :

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} f(z)\overline{g(z)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})} d\theta.$$

(1) Montrer que cette formule définit bien un produit intérieur.
(2) Montrer que $(z^n, n \in \mathbb{N})$ définit un système orthonormé, complet (pour la densité, on pourra utiliser l'exercice 2).
(3) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit A_m le sous-espace des fonctions qui ont un zéro d'ordre au moins égal à m en zéro, c'est-à-dire $A_m := \{f \in RH^2 : f^{(k)}(0) = 0, 0 \leq k \leq m-1\}$. Déterminer $A_m^\perp$.
(4) * En utilisant la formule de Cauchy, $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que si $f_n \to f$ au sens de la norme de RH^2, alors $f_n \to f$ uniformément sur le disque $\{|z| \leq \frac{1}{2}\}$.
(5) On considère la suite $f_n(z) := \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$. Montrer que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans RH^2, mais qu'elle n'est pas convergente (donc RH^2 n'est pas un espace de Hilbert).

Exercice 8. On se place dans $H := L^2(-\pi, \pi]$. On prolonge toutes les fonctions pour être périodiques de période 2π, autrement dit, si $x \in (\pi, 3\pi]$ par exemple, on pose $f(x) := f(x - 2\pi)$, et ainsi de suite.

On rappelle que quand f et g sont dans cet espace, dont l'existence est admise, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$ ont un sens (qui correspond au sens habituel quand f et g sont par exemple bornées et continues par morceaux, ou dès qu'on peut définir ces intégrales au sens des intégrales généralisées) ; qu'il contient l'ensemble des fonctions continues comme un sous-espace dense ; mais qu'on assimile toute fonction f telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$ à la fonction nulle. Par exemple, deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points seront considérées comme égales.

On pose toujours

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\overline{g(t)} dt.$$

On rappelle que la densité des fonctions continues dans H implique que pour tout $f \in H$, $\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\| = 0$, et donc que $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de H, où $e_n(x) := e^{inx}$.

Soit A l'espace des fonctions π-périodiques, c'est-à-dire telles que $f(x + \pi) = f(x)$, pour tout x.

On pose $A_0 := \{e_{2k}, k \in \mathbb{Z}\}$, $A_1 := \{e_{2k+1}, k \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que A_0 est un système orthonormé et que $A_0 \subset A$.
(2) Montrer que $A_1 \subset A^\perp \subset A_0^\perp$.
(3) Montrer que $\overline{\mathrm{Vect} A_0} \subset A_1^\perp$. En utilisant le fait que $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de H, montrer que $\overline{\mathrm{Vect} A_0} = A_1^\perp$.
(4) Montrer que A est fermé, et en déduire que $A = A_1^\perp$.

Exercice 9. On se place dans E un espace de Hilbert (toute suite de Cauchy est convergente).

Soit $S = \{x_0, x_1, x_2 \dots\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un système orthonormé. Soit $(c_n)_n \subset \mathbb{C}$ une suite de coefficients telle que $\sum_n |c_n|^2 < +\infty$.

Montrer que $\sum_n c_n x_n := \lim_n \sum_{k=0}^n c_k x_k$ est bien défini comme élément de E.

On suppose pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $c_n \neq 0$. Montrer que $\sum_n c_n x_n$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs x_n (une base hilbertienne infinie n'est pas une base au sens habituel).

Exercice 10. On se place à nouveau dans $H := L^2(-\pi, \pi]$. Voici un exemple intéressant de la situation précédente.

(1) Montrez, comme une conséquence de l'exercice 9 que la fonction définie par

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \cos(jx)$$

est dans H, alors que la série n'est pas absolument convergente.

(2) (Plus dur !) Montrez que pour $x \neq 0$, la série converge.

Nous allons procéder ainsi : on pose $A_n(x) := \sum_{j=1}^n \cos(jx)$. Montrer que $|A_n(x)| \leq n$. Montrer que

$$A_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} - 1.$$

Indication : $A_n(x) = \Re\left(\sum_{j=1}^n e^{ijx}\right)$.

En déduire que $|A_n(x)| \leq \frac{C}{|x|}$, pour une certaine constante C.

Maintenant, on procède à la transformation d'Abel : montrer que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cos(jx) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) A_j(x) + \frac{1}{n} A_n(x),$$

et en déduire la convergence de la série.

(3) (Subtil) Déduire des calculs ci-dessus que $|f(x)| \leq C_1 + C_2 |\ln|x||$, pour $x \neq 0$. Méthode : déduire de la question précédente que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) A_j(x).$$

Puis, étant donné $x \neq 0$, choisir n tel que $n \leq |x|^{-1} \leq n+1$, et majorer la somme ci-dessus en traitant séparément $\sum_{j=1}^n$ et $\sum_{j=n+1}^\infty$ avec les deux majorations possibles pour $A_n(x)$.