TD 3. Inversion, Régularisation

1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$

Exercice 1. Soit f une fonction bornée, continue par morceaux, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|$ converge. Soit g une fonction indéfiniment dérivable à support borné (c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que si $|x| \geq A$, alors $g(x) = 0$). Montrer que $f * g$ est indéfiniment dérivable.

Exercice 2. Les fonctions indéfiniment dérivables usuelles (polynômes, fractions rationnelles, exponentielles, fonctions trigonométriques) ne sont pas à support borné.

Le but de cet exercice est de construire une fonction indéfiniment dérivable à support borné.

(1) Soit $g(x) := e^{-1/x^2}$ pour $x > 0$, $g(x) = 0$ pour $x \leq 0$.
Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Montrer par récurrence qu'il existe des polynômes P_n tels que pour $x > 0$, $g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$ (indication pour les calculs : dériver $\frac{P_n(x)}{x^{3n}}$ comme le produit $P_n(x)x^{-3n}$ plutôt que comme un quotient).

(2) Montrer par récurrence que $g^{(n-1)}$ est dérivable en 0 et que $g^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que la fonction $\alpha(x) := g(1-x)g(x+1)$ est indéfiniment dérivable, à support borné.
Soit $M := \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx$, on pose $\rho(x) := \frac{1}{M}\alpha(x)$ et pour tout $\delta > 0$, $\rho_\delta(x) := \frac{1}{\delta}\rho(\frac{x}{\delta})$. Montrer que ρ_δ est une identité approchée.

(4) En déduire que toute fonction uniformément continue bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions indéfiniment dérivables.

2. Une application de la formule d'inversion

Nous allons calculer la transformée de Fourier du Noyau de Poisson du demi-plan, et en déduire une formule qui a des applications.

Exercice 3. On pose, pour tout $\delta > 0$,

$$P_\delta(x) := \frac{1}{\pi\delta} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\delta}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + x^2}.$$

Notez que P est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose $e(x) := e^{-|x|}$, on rappelle que $\hat{e}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$.

(1) Trouver la valeur de $\delta > 0$ telle que $\hat{e}(\xi) = P_\delta(\xi)$.

(2) En déduire de quelle fonction $P_1(\xi)$ est la transformée de Fourier, puis grâce à la formule d'inversion, la valeur de $\hat{P}_1(\xi)$.

(3) Calculer $\hat{P}_\delta(\xi)$ pour un $\delta > 0$ quelconque.

(4) En utilisant la formule qui donne la transformée de Fourier d'un produit de convolution, calculer $\mathcal{F}(P_{\delta_1} * P_{\delta_2})$ pour $\delta_1, \delta_2 > 0$. En déduire la valeur de $P_{\delta_1} * P_{\delta_2}(x)$.