Université Paul Sabatier S5, Année 2016-2017
L3 Spécial Physique, Analyse Hilbertienne

TD 1. Transformée de Fourier

On rappelle la définition de la *Transformée de Fourier* d'une fonction f, quand f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt.$$

Exercice 1. Soit $f_0(x) := \chi_{[-1/2,+1/2]}(x)$ (c'est-à-dire la fonction "porte" : $f(x) = 1$ si $-1/2 \leq x \leq 1/2$, et 0 sinon). Calculer $\hat{f_0}$. Cette fonction est-elle absolument intégrable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Montrer que si g est une fonction en escalier, alors $\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{g}(\xi) = 0$.

Exercice 3. Soit f une fonction telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converge. On suppose de plus que f est paire, à valeurs réelles. Montrer que $\hat{f}(\xi)$ qui est, a priori, un nombre complexe, est en fait réel. (Rappel : si $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$).

Exercice 4. On pose $f(x) := e^{-|x|}$. On rappelle que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a+ib) e^{(a+ib)x}$.

(1) Montrer que $x^k f(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(2) Montrer par récurrence la propriété générale suivante (P_n) : *Si $x^k g(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, pour $0 \leq k \leq n$, alors $(\hat{g})^{(n)}$ existe et est obtenue en prenant la transformée de Fourier de $x \mapsto (-2\pi i x)^n g(x)$.*
(3) Montrer sans la calculer que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
(4) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-2\pi i x \xi} dx$, en déduire le calcul de $\hat{f}(\xi)$.

Exercice 5. Montrer que les deux espaces de fonctions suivants sont égaux à l'espace de Schwartz

(1) $\mathcal{S}_0 := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \to \infty} x^n f^{(k)}(x) = 0 \right\}$;
(2) $\mathcal{S}_1 := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \to \infty} x^n f^{(k)}(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |x^n f^{(k)}(x)| \text{ converge.} \right\}$.

Exercice 6. Montrer que la famille $(K_\delta)_{\delta > 0}$, où $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}}$ est une identité approchée.