

TD 1. Séries de Fourier

On rappelle que si f est périodique de période 2π on a

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt.$$

Exercice 1. Calculer $c_n(f)$ pour les fonctions suivantes, qu'on prolongera toujours pour être périodiques de période 2π :

- (1) $f(x) = x$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$.
- (2) $f(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$ pour $\pi < x < 2\pi$.
- (3) $f(x) = |x|$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$. Dans ce cas, montrer qu'on peut développer f en série de cosinus. On admet que $S_N(f)(x)$ converge vers $f(x)$ en tout x . En considérant $x = 0$, déduire que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \pi^2/8$, puis que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \pi^2/6$.

Exercice 2. Considérons le *noyau de Dirichlet*, c'est-à-dire pour le polynôme trigonométrique

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

défini pour $x \in [-\pi, \pi]$.

- (1) Déterminer $\sum_{n=0}^N \lambda^n$ et $\sum_{n=-N}^{-1} \lambda^n$
- (2) En déduire que $\sum_{n=-N}^N \lambda^n = \frac{\lambda^{-N-1/2} - \lambda^{N+1/2}}{\lambda^{-1/2} - \lambda^{1/2}}$.
- (3) En posant $\lambda = e^{inx}$ vérifier que

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}$$

- (4) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|D_N(x)| \geq c \frac{\sin((N+1/2)x)}{|x|}$.
- (5) Montrer que

$$L_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq c \int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin(x)|}{|x|} dx + O(1).$$

- (6) Montrer que $L_N \geq c \log N$. [Suggestion : écrire l'intégrale comme une somme $\sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$ et utiliser le fait que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq c \log N$.]

Exercice 3. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions continues et T -périodiques. Montrer que

- (1) $f * (g + h) = f * g + f * h$.
- (2) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ pour tout $c \in \mathbb{C}$.
- (3) $f * g = g * f$.
- (4) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- (5) $f * g$ est continue.
- (6) $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

Exercice 4. Soit

$$h_N(t) = \frac{1}{A_N} \cos^{2N} \left(\frac{\pi t}{T} \right) \text{ avec } A_N = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^{2N} \left(\frac{\pi t}{T} \right) dt,$$

pour $N \geq 0$. Montrer que h_N est un polynôme trigonométrique et que (h_N) est une unité approchée.

Exercice 5. Soit

$$F_N = \frac{1}{N} (D_0 + \cdots + D_{N-1}).$$

(1) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(t) dt = 1.$

(2) Montrer que $F_N(x) = \left(\frac{\sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(x/2)} \right)^2.$

(3) En déduire que (F_N) est une unité approchée.

Exercice 6. Retrouver

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

comme application de la formule de Parseval pour la fonction $f(x) = x$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$.