Contrôle Terminal du 18 mai 2016

(10h-12h)

TD, calculatrice, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Les notes prises en TD ne sont pas autorisées. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Exercice I

(1) Déterminer les zéros et les singularités isolées de la fonction
$$f(z) = \frac{z^2+z-4}{(1-z^2)(3-z)}$$
ainsi que leur nature, et calculer le résidu de f en chacun des points singuliers.

(2) Déterminer des nombres $A, B \in \mathbb{C}$ tels que
$$\frac{z^2+z-4}{(1-z^2)(3-z)} = \frac{A}{1-z^2} + \frac{B}{3-z}.$$

(3) Déterminer la série de Laurent de f centrée en zéro dans la couronne $1 < |z| < 3$.

Exercice II

Soit $f(z)$ la fonction complexe définie par
$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)}{(z-3)^2}.$$

(1) Déterminer où la fonction est définie et holomorphe, et ses singularités isolées, ainsi que leur nature.

(2) Calculer $\int_{C(3,1)} f(z)dz$, où le cercle est parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Exercice III

(1) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2}\,dx$.

(2) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+x+1}\,dx$.

Exercice IV

Soient f une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$), $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $A, B > 0$ tels que
$$|f(z)| \leq A + B|z|^a$$
pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module assez grand. Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus a. (*Indication :* on pourra utiliser les formules de Cauchy.)

Analyse Complexe L2 PS

Corrigé du Contrôle Terminal du 18 mai 2016

Exercice I :

(1) La fonction $f(z)$ est une fraction de deux polynômes :

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \text{avec} \quad g(z) = z^2 + z - 4 \quad \text{et} \quad h(z) = (1-z)(1+z)(3-z).$$

On a $f(z_0) = 0$ ssi $g(z_0) = 0$ et $h(z_0) \neq 0$.

Les racines de g sont : $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ et ces points ne sont pas des racines de h donc f a deux zéros simples en $z = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ et $z = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Les seules singularités possibles pour f sont les zéros de h. Or, on a vu que $\mathrm{Zeros}(h) \cap \mathrm{Zeros}(g) = \emptyset$, donc tous les zéros de h sont des pôles pour f. De plus, h n'a que des zéros simples et donc f n'a que des pôles simples en : $1, -1, 3$.

$$\mathrm{Rés}(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z^2+z-4}{-(1+z)(3-z)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{Rés}(f, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{z^2+z-4}{(1-z)(3-z)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{Rés}(f, 3) = \lim_{z \to +3} (z-3) f(z) = \lim_{z \to 3} \frac{z^2+z-4}{-(1-z^2)} = \frac{8}{8} = 1.$$

(2) On a :

$$f(z) = -\frac{1}{1-z^2} - \frac{1}{3-z} \qquad \text{i.e. } A = B = -1.$$

(3) Pour $1 < |z| < 3$ on a :

$$-\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{2n+2}}$$

$$-\frac{1}{3-z} = -\frac{1}{3} \, \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

et donc

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^{2n+2}} + \sum_{n\geq 0} \left(-\frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n \quad \forall\ 1<|z|<3.$$

Exercice II :

① La fonction f est le rapport de deux fonctions, $f = \frac{g}{h}$:
$g(z) = \cos\left(\frac{1}{z-i}\right)$ et $h(z) = (z-3)^2$.
La fonction g a une singularité essentielle en i car son developpement de Laurent dans un disque épointé centré en i est : $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(z-i)^{2n}}$ qui a un nombre infini de coéfficients ~~négatifs~~ des puissances négatives de $z-i$ qui sont non nuls.
Dans un disque épointé $D(i,r)\setminus\{i\}$ avec $r>0$ t.q. $3 \notin D(i,r)$ on a que f est le produit de g par une fontion qui est holomorphe dans $D(i,r)$ (la fonction $\frac{1}{h}$) et donc i est une singularité essentielle pour f.
[Rmq : ceci peut être montré aussi en passant par la série de Laurent de f.]

Le point $z=3$ est un pôle double de f car il est un zéro double pour h et $g(3) \neq 0$.

②. On a que Rés$(f,3)$ coincide avec le coéfficient de $z-3$ dans le dev. de Taylor de $(z-3)^2 \cdot f(z) = g(z)$ centré en $z=3$, c'est-à-dire :

$$\text{Rés}(f,3) = \frac{g'(3)}{1!} = \left[-\sin\left(\frac{1}{z-i}\right)\cdot \frac{-1}{(z-i)^2}\right]_{z=3}$$
$$= \frac{1}{(3-i)^2}\sin\left(\frac{1}{3-i}\right).$$

D'après le théorème des Résidus on a donc :

$$\int_{\overleftarrow{C(3,1)}} f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{(3-i)^2}\sin\left(\frac{1}{3-i}\right) = 2\pi i\ \text{Rés}(f,3)$$

car $3 \in D(3,1)$ et $i \notin D(3,1)$.

Exercice III :

(1) On considère la fonction

$$f(z) = \frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}.$$

Les seuls pôles de f sont $\pm i$ qui sont deux pôles double et n'appartient pas à l'axe réel.

De plus on a que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} z\cdot f(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} \frac{z^2(z+1)}{(z^2+1)^2} = 0$

Donc, grâce à ce qu'on a vu en cours on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ pôle de } f \\ p \in \text{demi-plan supérieur}}} \text{Rés}(f, p).$$

$$= 2\pi i \,\text{Rés}\left(\frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}, i\right).$$

$\text{Rés}\left(\frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}, i\right)$ = coéff de $(z-i)$ dans le d.s.e de $(z-i)^2\cdot f(z) \doteq g(z)$.

$$g(z) = \frac{z(z+1)}{(z+i)^2}, \quad g'(z) = \frac{(z+1+z)(z+i)^{\cancel{2}\,1} - 2\cancel{(z+i)}(z^2+z)}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{z(2i-1)+i}{(z+i)^3}$$

Donc :

$$\text{Rés}\left(\frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}, i\right) = \frac{g'(i)}{1!} = \frac{(2i-1)i+i}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}$$

d'où on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i\cdot\frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

(2) On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}.$$

On a $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, donc d'après ce on a vu en cours, comme les seuls points singuliers de f sont $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ pôle de } f \\ p\in\{\mathrm{Im}(z)>0\}}} \mathrm{Rés}\left(f(z)e^{iz}, p\right).$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}\,dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)\,dx\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(2\pi i\ \mathrm{Rés}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(2\pi i \cdot \frac{e^{i\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

Exercice IV :

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ le d.s.e., de rayon de conv. infini, de f à l'origine.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ on a :

$$2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt$$ grâce aux formules de Cauchy.

Soit $R > 0$ tel que $|f(z)| \leq A + B|z|^2$ si $|z| \geq R$.

Alors, pour $r \geq R$ on a :

$$2\pi r^n |a_n| \leq \int_0^{2\pi} (A + Br^2)\,dt = 2\pi (A + Br^2)$$

En faisant tendre r vers $+\infty$ il vient $a_n = 0$ pour $n > 2$, d'où le résultat.