Corrigé Exercice 3 Feuille TD 3

Exercise 3. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Pour tout $a \in \mathbb{D}$ posons
$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

(1) Montrer que φ_a et une bijection qui envoie le cercle unité sur le cercle unité, $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et a en 0.

(2) Montrer que la fonction réciproque de φ_a est φ_{-a} et qu'on a
$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2 \quad \text{et} \quad \varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

(3) Soit $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique, bijective dont la réciproque est analytique. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ et
$$f(z) = \lambda\varphi_a(z),$$
pour tout $z \in \mathbb{D}$, où $a \in \mathbb{D}$ est tel que $f(a) = 0$.

Solution :

(1)&(2) Soit $a \in \mathbb{D}$. La fonction φ_a est une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{\bar{a}}\right\}$ car quotient de deux fonctions, $z-a$ et $1-\bar{a}z$, qui sont analytiques sur $\mathbb{C}$, et $1-\bar{a}z$ s'annule seulement pour $z = 1/\bar{a} \notin \overline{\mathbb{D}}$. Une simple substitution montre que $\varphi_a(a) = 0$. On a
$$\begin{aligned}
\varphi_{-a}(\varphi_a(z)) &= \frac{\varphi_a(z)+a}{1+\bar{a}\varphi_a(z)} \\
&= \frac{\frac{z-a}{1-\bar{a}z}+a}{1+\bar{a}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}} \\
&= \frac{z-a+a-|a|^2z}{1-\bar{a}z} \cdot \frac{1-\bar{a}z}{1-\bar{a}z+\bar{a}z-|a|^2} \\
&= \frac{z-|a|^2z}{1-|a|^2} \\
&= z.
\end{aligned}$$

Ainsi, φ_a est bijective sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{\bar{a}}, -\frac{1}{\bar{a}}\right\}$, avec pour réciproque φ_{-a}. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$\frac{|e^{it}-a|}{|1-\bar{a}e^{it}|} = \frac{|e^{it}-a|}{|e^{-it}-\bar{a}|} = 1,$$
ce qui montre que φ_a envoie le cercle unité dans le cercle unité. Il en est de même pour φ_{-a} et donc $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. D'après le Théorème du maximum, nous avons que
$$|\varphi_a(z)| < \max_{w\in\partial\mathbb{D}} |\varphi_a(w)| = 1$$
pour tout $z \in \mathbb{D}$ (notons que l'inégalité est stricte car φ_a n'est pas constante), ce qui entraîne $\varphi_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. En considérant à nouveau φ_{-a}, on obtient $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Le calcul direct nous donne
$$\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$
et donc $\varphi_a'(0) = 1-|a|^2$ et $\varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$.

(3) *Affirmation :* Soit $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique, bijective dont la réciproque est analytique. Si $f(0) = 0$, alors f est une rotation, c'est-à-dire $f(z) = \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$.

Démonstration. Ceci découle du lemme de Schwarz. En fait, comme $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, d'aprés le lemme de Schwarz nous avons que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. En appliquant le lemme de Schwarz à la réciproque f^{-1} de f, on obtient $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ pour tout $w \in \mathbb{D}$, ce qui, pour $w = f(z)$ devient $|z| \leq |f(z)|$. Donc $|f(z)| = |z|$. Alors la fonction analytique $f(z)/z$ a pour module constant 1, et donc elle est constante, c'est-à-dire

$$\frac{f(z)}{z} = \lambda,$$

avec $|\lambda| = 1$. □

Soit $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique, bijective dont la réciproque est analytique. Si $f(0) = 0$, alors grâce à l'affirmation précédente, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ et

$$f(z) = \lambda z.$$

Si $f(0) \neq 0$, alors il existe $a \in \mathbb{D}$ tel que $f(a) = 0$. Il suit que la fonction $h\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ définie par $h = f \circ \varphi_{-a}$ est une fonction analytique, bijective dont la réciproque est analytique et telle que $h(0) = f(\varphi_{-a}(0)) = f(a) = 0$. Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ et

$$h(w) = f(\varphi_{-a}(w)) = \lambda w,$$

pour tout $w \in \mathbb{D}$. En posant $w = \varphi_a(z)$ on retrouve

$$f(z) = \lambda \varphi_a(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$.