Feuille TD 9

Exercice 1. Montrer que $|e^z - 1| < 2$ pour tout z dans le cercle unité. En déduire que la seule solution de l'équation $e^z = 1 + 2z$ dans le disque unité est $z = 0$.

Exercice 2. Soit

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

(1) Déterminer les singularités de f et calculer les résidus en ces points.

(2) Soit $\gamma_\varepsilon \colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$ le chemin $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \text{Rés}(f, 0) \cdot \pi i.$$

(3) Soit $0 < \varepsilon < 1 < R$. Représenter le lacet Γ formé de la suite de chemins suivants :
- $\gamma_1(t) = t$ pour $t \in [\varepsilon, R]$
- $\gamma_2(t) = Re^{\pi it}$ pour $t \in [0, 1]$
- $\gamma_3(t) = t$ pour $t \in [-R, -\varepsilon]$
- $\gamma_4(t) = \varepsilon e^{\pi i(1-t)}$ pour $t \in [0, 1]$.

(4) Calculer

$$\int_\Gamma f(z)dz.$$

(5) Montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

(6) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et soit $R > 0$.

(1) Représenter le lacet γ_R formé de la suite de chemins suivants :
- $\gamma_1(t) = t$ pour $t \in [0, R]$
- $\gamma_2(t) = Re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi/n]$
- $\gamma_3(t) = (1 - t)Re^{2\pi i/n}$ pour $t \in [0, 1]$.

(2) Calculer

$$J_n = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1 + z^n}.$$

(3) Montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1 + z^n} = 0.$$

(4) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n}.$$

Exercice 4. Soit Γ le lacet de l'exercice 2. On note φ et $\theta(z)$ les déterminations holomorphes du logarithme et de la racine carrée définie sur $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}_-)$ et correspondant à $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$.

(1) Déterminer les singularités de la fonction

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\theta(z)(1+z^2)}$$

dans $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}_-)$ ainsi que les résidus en ces points.

(2) Calculer

$$\int_\Gamma f(z)dz.$$

(3) Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

(4) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0.$$

(5) En déduire les valeurs des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

Exercice 5. Soient $\mathbb{D} = D(0,1)$. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{z}{1-z}.$$

(1) Déterminer les singularités de f ainsi que les résidus en ces points.

(2) Montrer que la série de terme général

$$u_n(z) = \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$.

(3) En déduire que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

(4) Montrer que la fonction $h = f - g$ vérifie

$$h(z^2) = h(z).$$

(5) En déduire que $h = 0$ et donc $f = g$.

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note γ_n le lacet dont l'image est le bord orienté du carré
$$\left\{ x + iy \in \mathbb{C} \mid \sup\{|x|, |y|\} \leq n + \frac{1}{2} \right\}.$$

(1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $2|y| \geq 1$. Établir :
$$|\text{cotan}(\pi(x+iy))| \leq \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}.$$

(2) Soient $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, tels que $2|y| \leq 1$. Montrer que :
$$\left| \text{cotan}\left(\pi \left(k + \frac{1}{2} + iy \right) \right) \right| \leq \tanh \frac{\pi}{2}.$$

(3) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si z appartient au lacet γ_n alors $|\text{cotan}(\pi z)| \leq M$.

(4) Soient $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tels que $2|z| < 2n+1$. Établir :
$$\begin{aligned} \pi\text{cotan}(\pi z) - \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{\pi\text{cotan}(\pi u)}{u-z} du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{z\pi\text{cotan}(\pi u)}{u(u-z)} du. \end{aligned}$$

(5) Montrer que, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :
$$\pi\text{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}.$$

(6) Calculer
$$I_n = \int_{\gamma_n} \frac{\pi\text{cotan}(\pi z)}{z^2} dz.$$

(7) En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$