

Feuille TD 8

Exercice 1. Soit γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz.$$

Exercice 2. On note γ le cercle de centre 0 et de rayon $3/2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer :

$$\int_{\gamma} \frac{5z^2 + 1}{z(z-1)} dz \quad \text{et} \quad \int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz.$$

Exercice 3. Pour $r \neq 1$, on note γ_r le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{1/z}}{z-1} dz.$$

Exercice 4. Déterminer la série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes suivantes:

- (1) $0 < |z| < 1$,
- (2) $1 < |z| < 2$.

Exercice 5. Trouver le résidu de $f \circ \varphi$ au point 0, si φ est holomorphe au voisinage de 0, avec $\varphi'(0) \neq 0$ et si f a un pôle simple au point $\varphi(0)$ avec le résidu R .

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > 1$ et $b > \sqrt{2}$. Calculer :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \cos x}, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{a + \cos x} dx, \quad I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{b + \cos x + \sin x}.$$

Exercice 7. Soit $R \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit Γ_R le bord du demidisque de centre 0 et rayon R situé dans le demi-plan supérieur.

a) On fixe $a \in \mathbb{R}^+$. Calculer l'intégrale

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx.$$

b) En intégrant $ze^{iz}/(1+z^2)$ sur le même contour, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx.$$