

Feuille TD 7

Exercice 1. Soient $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ deux lacets de classe C^1 par morceaux tels que $\gamma_0^* \cap \gamma_1^* = \emptyset$. Soient $x = \gamma_0(0)$, $y = \gamma_1(0)$ les points de bases des deux lacets, et soit $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une homotopie de γ_0 sur γ_1 .

- (1) Soit $\delta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ le chemin décrit par les points de base à travers H . Montrer qu'il existe une homotopie à extrémités fixées de γ_0 sur $\gamma := \delta * \gamma_1 * \delta^{-1}$.
- (2) Soit $z \notin \gamma_0^* \cup \gamma_1^* \cup \delta^*$. Que peut-on dire sur $\text{Ind}_{\gamma_0}(z)$ et $\text{Ind}_{\gamma_1}(z)$?

Exercice 2. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ensemble ouvert. On dit qu'une fonction continue $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait la propriété de la moyenne si et seulement si pour tout $z_0 \in \Omega$ il y a une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels tels que $r_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_n e^{it}) dt.$$

- (1) Soit $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait la propriété de la moyenne dans Ω , et soit $V \subset \Omega$ une composante connexe non vide de l'ouvert Ω . Montrer que s'il existe $p \in V$ tel que $u(p) = \sup_{q \in V} u(q)$, alors u est constante sur V .
- (2) Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans Ω . Montrer que f satisfait la propriété de la moyenne dans Ω . *Indication* : Utiliser la formule de Cauchy.

Exercice 3 (Principe de réflexion de Schwarz). Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert symétrique par rapport à l'axe réel, c'est-à-dire, tel que

$$z \in \Omega \iff \bar{z} \in \Omega.$$

On note

$$\Omega_{\pm} = \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \text{Im}(z) > 0\}, \quad \Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}.$$

Soient $f_{\pm}: \Omega_{\pm} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes, qui se prolongent par continuité à Ω_0 de sorte que

$$f_+(x) = f_-(x) \quad \forall x \in \Omega_0.$$

Considérons la fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \begin{cases} f_+(z) & \text{si } z \in \Omega_+ \\ f_{\pm}(z) & \text{si } z \in \Omega_0 \\ f_-(z) & \text{si } z \in \Omega_- \end{cases}$$

- (1) Soit $z_0 \in \Omega_0$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

pour tout triangle T plein contenu dans $D(z_0, r)$.

- (2) En déduire que f est holomorphe sur Ω .

Exercice 4. Déterminer les singularités des fonctions suivantes, leur nature et les résidus correspondants :

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} \frac{\sin z}{z^3 - \pi^2 z}, & \text{b)} \frac{z}{\sin z}, & \text{c)} \exp\left(\frac{1}{z^4}\right), & \text{d)} z \cos \frac{1}{z}, & \text{e)} \frac{1}{z(e^z - 1)}, \\ \text{f)} \cotanz - \frac{1}{z}, & \text{g)} \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}, & \text{h)} \pi \cotan(\pi z), & \text{i)} \frac{1}{\sin(z^2)}. \end{array}$$

Exercice 5. Soit U un ouvert connexe. Même question que ci-dessus avec :

- (1) $\frac{f'}{f}$, lorsque f est une fonction holomorphe sur U .
- (2) $\frac{g}{h}$, lorsque g et h sont deux fonctions holomorphes sur U et que h a un pôle simple.
- (3) $\frac{f(z)}{(z - z_0)^n}$, lorsque f est une fonction holomorphe sur U , $z_0 \in U$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Déterminer la série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes suivantes:

- (1) $0 < |z| < 1$,
- (2) $1 < |z| < 2$.

Exercice 7. Calculer les résidus de

- (1) $\frac{e^z}{\sin^2 z}$ ($z = k\pi$),
- (2) $\frac{\cos z}{z^3 \sin z}$ ($z = 0$),

Exercice 8. Décomposer en série de Laurent dans les diverses couronnes admissibles de centre indiqué, les fonctions suivantes:

- (1) $\frac{z - \sin z}{z^3}$ ($z = 0$),
- (2) $\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ ($z = 1$, $z = 2$),
- (3) $\frac{z}{z^2 + 1}$ ($z = i$),
- (4) $\frac{e^z}{(z-1)^3}$ ($z = 1$),
- (5) $\frac{1}{z+a}$, ($z = 0$)
- (6) $\frac{2z}{z^2 + 2z + 1}$ ($z = 0$).

Exercice 9. Trouver le résidu de $f \circ \varphi$ au point 0, si φ est holomorphe au voisinage de 0, avec $\varphi'(0) \neq 0$ et si f a un pôle simple au point $\varphi(0)$ avec le résidu R .

Exercice 10. Soit γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz.$$

Exercice 11. On note γ le cercle de centre 0 et de rayon $3/2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer :

$$\int_{\gamma} \frac{5z^2 + 1}{z(z-1)} dz \quad \text{et} \quad \int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz.$$

Exercice 12. Pour $r \neq 1$, on note γ_r le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{1/z}}{z-1} dz.$$