Université Paul Sabatier — S6, Année 2015–2016
L3 MAF, Introduction à l'Analyse Complexe

Feuille TD 5

Exercice 1. Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\overline{D(0,1)}$ et f une fonction holomorphe dans U. Pour $t \in [0, 2\pi]$, on pose $\gamma(t) = e^{it}$.

(1) Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_\gamma \left[2 + z + \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz, \quad I_2 = \int_\gamma \left[2 - z - \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz.$$

(2) En déduire la valeur de :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2 \frac{t}{2} dt, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2 \frac{t}{2} dt.$$

(3) Pour $|a| \neq 1$, évaluer :

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z - a} dz.$$

Exercice 2. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une fonction holomorphe dans le disque unité $D(0,1)$ telle que$|f(z)|(1 - |z|) \leq 1$ pour tout $z \in D(0,1)$. Prouver, pour $n \geq 1$:

$$|a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < e(n+1).$$

Exercice 3. *Théorème des trois cercles d'Hadamard.* Soient r et R des réels tels que $0 < r < R$ et $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. On suppose que Ω contient $C = \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z| \leq R\}$. Soit f une fonction holomorphe dans Ω. Pour $r \leq \rho \leq R$, on pose :

$$M(\rho) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|.$$

Établir, pour $r \leq \rho \leq R$:

$$M(\rho) \leq M(r)^{\frac{\log R - \log \rho}{\log R - \log r}} M(R)^{\frac{\log \rho - \log r}{\log R - \log r}}.$$

Indication : on pourra appliquer le principe du maximum à $z \mapsto z^p(f(z))^q$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Ensuite on pourra choisir $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r^\alpha M(r) = R^\alpha M(R)$ et une suite de rationnels de limite α.