Université Paul Sabatier S6, Année 2015–2016
L3 MAF, Introduction à l'Analyse Complexe

Feuille TD 4

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$, analytique sur le disque ouvert $D(0, 1)$ et nulle sur le demi-cercle $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Montrer que f est nulle. *Indication : on pourra considérer $g(z) = f(z)\overline{f(-\overline{z})}$.*

Exercice 2. Soient $I = [0, 1]$, $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ une application continue. Si $t \in I$, on pose $\chi(t) = \overline{\gamma(t)}$.

(1) Établir :
$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = \int_\chi \overline{f(\overline{z})} dz.$$
(2) On suppose que $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$. Montrer que:
$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = -\int_\gamma \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Exercice 3. Soient $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, $r \in]0, 1[$, $M > 0$ et $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ telle que $|f(z)| \leq M$ si $|z| = r$. On suppose que $f(0) = a_0 \neq 0$ et qu'il existe $z_0 \in D(0, r)$ tel que $f(z_0) = 0$. Montrer, à l'aide de la formule de Cauchy, que
$$|a_0| r \leq |z_0|(M + |a_0|).$$

Exercice 4. Soit $f(z) = \sin \frac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $|z| < 1$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 5. Soit $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{e^z + e}\right)$.

(1) Quel est le plus grand ouvert U sur lequel f est holomorphe ?
(2) Trouver les zéros de f.
(3) Montrer que cet ensemble possède un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(1) Montrer que, pour tout $0 \leq r < R$,
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$
(2) En déduire que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2,$$
où $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, et que pour tout $n \geq 0$, on a l'inégalité de Cauchy $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.
(3) On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe un entier $k \geq 0$ et des constantes $c \geq 0$, $r_0 \geq 0$ tels que $M(r) \leq cr^k$ pour tout $r \geq r_0$. Montrer que f est un polynôme de degré $\leq k$.