Feuille TD 3

Exercice 1. Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide.

(1) Montrer que les seules fonctions analytiques définies sur Ω et à valeurs dans $i\mathbb{R}$ sont les constantes.

(2) Soit f et g deux fonctions analytiques dans le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. On suppose que g ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$ et que $f(z)\overline{g(z)} \in i\mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = ic\,g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Exercice 2. Trouver toutes les fonctions holomorphes f telles que :

(1) $\mathrm{Re}(f(z)) = C$, où C est une constante,

(2) $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 + x - y^2$,

(3) $\mathrm{Re}(f(z)) = \cos x$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Pour tout $a \in \mathbb{D}$ posons

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

(1) Montrer que φ_a et une bijection qui applique le cercle unité sur le cercle unité, $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et a en 0.

(2) Montrer que la fonction réciproque de φ_a est φ_{-a} et qu'on a

$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2 \quad \text{et} \quad \varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

(3) Soit $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique, bijective avec réciproque analytique. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ et

$$f(z) = \lambda\varphi_a(z),$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$, où $a \in \mathbb{D}$ est tel que $f(a) = 0$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\overline{\mathbb{D}}$, et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur Ω et non-constante. On suppose que $f(0) = 1$ et que $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f possède au moins un zéro dans $\mathbb{D}$.

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 6. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin et f une fonction continue sur γ^*. Montrer que si δ est un chemin équivalent à γ, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\delta f(z)dz.$$

Exercice 7. Calculer l'intégrale des fonctions $f(z) = z^2$ et $g(z) = \frac{1}{z}$ sur le chemin (orienté dans le sens trigonométrique)

$$\Gamma = [\pi/2, \pi/2 + i] \cup [\pi/2 + i, -\pi/2 + i] \cup [-\pi/2 + i, -\pi/2].$$

Exercice 8. Calculer les intégrales curvilignes de $z - \frac{1}{z}$ le long des trois courbes joignant les points $1-i$ et $1+i$ en ligne droite ou au long du cercle centré en 0. Comparer les résultats et donner une explication.

Exercice 9. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité et $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^*$ une fonction analytique continue jusqu'au bord. Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$, il existe deux nombres complexes distincts $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}$ tels que $|f(z_0)| = |f(z_1)| = |f(z_2)|$.

Exercice 10.
(1) Démontrer que les opérateurs différentiels complexes $\partial_z := \frac{\partial}{\partial z}$ et $\partial_{\bar{z}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ vérifient la règle de Leibnitz et qu'ils sont conjugés dans le sens suivant : si f est une fonction différentiable sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ alors
$$\overline{\partial_z f} = \partial_{\bar{z}} \overline{f}, \quad , \overline{\partial_{\bar{z}} f} = \partial_z \overline{f}.$$
(2) En déduire que si f et $\bar{f}$ sont holomorphes sur Ω, alors f est constante sur Ω.
(3) Démontrer que si $h \colon D \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 (au sens réel) sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$, alors $\partial_z \partial_{\bar{z}} h = (1/4)\Delta h$ sur D, où Δ est l'opérateur de Laplace usuel sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que si f est holomorphe et de classe C^2 sur D, alors $u := \Re e f$ et $v := \Im m f$ sont harmoniques sur D i.e. $\Delta u \equiv 0$ et $\Delta v \equiv 0$ sur D.
(4) Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et f, g des fonctions holomorphes sur Ω. Vérifier que $\partial_z \partial_{\bar{z}} \big(f \overline{g}\big) = f' \overline{g'}$.
(5) Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions holomorphes (de classe C^2) sur Ω. On pose $h := |f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$. Calculer Δh. Que peut-on en déduire si la fonction $|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ est constante sur Ω ?
(6) A quelles conditions sur les fonctions f_k $(1 \leq k \leq n)$, la fonction $h := |f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ est harmonique sur Ω ?

Exercice 11. Soit $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$.
(1) Donner une condition nécessaire sur u pour qu'il existe une fonction holomorphe f sur Ω telle que $\Re e f = u$ sur Ω. Cette condition est-elle suffisante en général ?
(2) Déterminer toutes les fonctions holomorphes f (lorsqu'elles existent) telles que $\Re e f = u$ sur Ω dans chacun des cas suivants:
   (a) $\Omega = \mathbb{C}$ et $u(x, y) = x - y^2$,
   (b) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.
   (c) $\Omega = \mathbb{C}$ et $u(x, y) = \cos x$.
   (d) $\Omega := \{z \in \mathbb{C}; -\pi < \Re e z < +\pi\}$ et $u(x, y) = \frac{sinx}{\cos x + \cosh y}$.