Feuille TD 2

Exercice 1. Posons

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Montrer que une fonction f est holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Exercice 2. On rappelle que pour tout $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{R}^+)$ il existe un réel unique $\theta(z) \in]-\pi, +\pi[$ tel que $z = |z|e^{i\theta(z)}$. La fonction définie par $\text{Arg } z := \theta(z)$ est appelée la branche principale de la fonction multiforme $argz$ sur le domaine Ω.

(1) Démonter que si $z = x + iy \in \Omega$, on a

$$\text{Arg } z = 2\text{Arctg}\left(\frac{y}{x + |z|}\right).$$

En déduire que Arg est une fonction continue sur Ω et n'admet pas de prolongement continue à $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(2) Démontrer que la fonction définie par $\text{Log}(z) := \ln|z| + i\text{Arg}z$ est continue sur Ω et vérifie l'équation $\exp \text{Log}z = z$ pour tout $z \in \Omega$: on dit que Log est la branche principale du logarithme sur Ω. En déduire que Log est holomorphe sur Ω et calculer sa dérivée.

(3) Donner le développement en série entière de $\text{Log}(z)$ au voisinage de 1 à partir de celui de $1/z$.

Exercice 3. (1) Démontrer que la fonction carré $f : z \longmapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et réalise une transformation de $\mathbb{C}_*$ sur $\mathbb{C}_*$ qui envoie les droites sur des paraboles.

(2) Pour $w \in \mathbb{C}$, résoudre léquation $z^2 = w$. Sur quels domaines la fonction f est-elle bijective et quelle est sa bijection réciproque ? Définir la branche principale de la racine carrée sur le domaine $\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{R}^+)$.

(3) Existe t-il une fonction holomorphe h sur $\mathbb{C}$ telle que $h(z)^2 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?

Exercice 4. On considère la transformation homographique suivante:

$$W(z) := \frac{1 - z}{1 + z}.$$

(1) Démontrer que W est une transformation holomorphe involutive qui laisse invariant l'axe des réels $\Im m z = 0$ et qui échange l'axe des imaginaires purs $\Re e z = 0$ et le cercle unité. Quelle est l'image du disque unité par W ?

(2) Démontrer que la fonction définie par

$$f(z) := \text{Log}\left(\frac{1 - z}{1 + z}\right)$$

est une transformation holomorphe du disque unité $\mathbb{D}$ sur une bande B que l'on déterminera.

Exercice 5. On définit la transformation de Cayley par

$$C(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

(1) Démontrer que est C une transformation holomorphe du demi-plan de Poincaré $\mathbf{H} := \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$ sur le disque unité $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ dont on déterminera la transformation inverse.

(2) Démonter que C est une transformation holomorphe qui envoie la droite $\Im m z = 0$ sur le cercle unité $|w| = 1$.

(3) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $w := C(z)$. Comparer $\bar{w}$ et $w^* := C(\bar{z})$ et interpréter géométriquement la relation obtenue.