Corrigé Examen Partiel du 1 mars 2016
(14h-17h)

Exercice 1. Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide.

(1) Montrer que les seules fonctions analytiques définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les constantes.

(2) Soit f et g deux fonctions analytiques définies sur Ω telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \Omega$. Prouver qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in \Omega$. *Indication :* on pourra appliquer (1) à une fonction bien choisie.

Solution :

(1) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide et $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur Ω telle que $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$. Si f n'est pas constante, d'après le Théorème de l'application ouverte, pour tout ouvert $U \subset \Omega$, son image $f(U)$ est un overt de $\mathbb{C}$. Or $f(U) \subset \mathbb{R}$ par hypothèse et donc $f(U)$ ne peut pas être un ouvert de C, ce qui nous donne une contradiction. Donc f doit être constante.

(2) Soit $h = f - g \colon \Omega \to \mathbb{C}$. Alors h est analytique sur Ω. D'autre part, si $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \Omega$, on obtient $f(z) + \overline{g(z)} = \overline{f(z)} + g(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \Omega$. Par suite :

$$2i\,\mathrm{Im}(h) = h - \overline{h} = f - g - (\overline{f} - \overline{g}) = f + \overline{g} - (\overline{f} + g) = 0.$$

D'après (1), il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $h(z) = c$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy - ay^2.$$

Trouver toutes les fonctions holomorphes f telles que $P = \mathrm{Re}(f)$.

Solution : On vérifie facilement que P est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe f holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $P = \mathrm{Re}(f)$, et posons $Q = \mathrm{Im}(f)$. Grâce aux conditions de Cauchy-Riemann on a :

$$\begin{cases} P_x(x,y) &= & 2ax + 2by &= & Q_y(x,y) \\ P_y(x,y) &= & -2ay + 2bx &= & -Q_x(x,y) \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$Q(x, y) = b(y^2 - x^2) + 2axy + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g) = P$, alors $\mathrm{Re}(f - g) = 0$ et nous avons vu en TD que ceci implique que $f - g \equiv ik$ avec $k \in \mathbb{R}$. Les fonctions cherchées sont donc les fonctions de la forme

$$ax^2 + 2bxy - ay^2 + i\left(b(y^2 - x^2) + 2axy + k\right)$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soient $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, $r \in]0,1[$, $M > 0$ et $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ telle que $|f(z)| \leq M$ si $|z| = r$. On suppose que $f(0) = a_0 \neq 0$ et qu'il existe $z_0 \in D(0,r)$ tel que $f(z_0) = 0$.

(1) Donner l'expression locale de f au voisinage du point z_0.

(2) Montrer que

$$|a_0| r \leq |z_0|(M + |a_0|).$$

Indication : considérer la fonction $h(z) = f(z)/(z - z_0)$.

Solution :

(1) Si $f(z_0) = 0$, alors il existe $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 1$ tel que

$$f(z) = (z - z_0)^{\nu} g(z),$$

où g est une fonction analytique sur un voisinage de z_0 et $g(z_0) \neq 0$.

(2) Pour $z \in \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$, posons :

$$h(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Alors h se prolonge à une fonction analytique dans $\mathbb{D}$. D'après le principe du maximum, on a :

$$\sup_{z \in \overline{D(0,r)}} |h(z)| = \sup_{z \in \partial D(0,r)} |h(z)|.$$

Par suite, si $|z| < r$:

$$|h(z)| \leq \frac{M}{r - |z_0|}.$$

On en déduit le résultat car, pour $z = 0$, on obtient

$$\frac{|a_0|}{|z_0|} \leq \frac{M}{r - |z_0|}.$$

Exercice 4. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité et $f\colon \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ une fonction analytique telle que $|f(z)| \to 1$ lorsque $|z| \to 1$.

(1) Montrer qu'ou bien f est constante ou bien il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $f(z_0) = 0$. *Indication :* considérer la fonction $1/f$.

(2) Prouver que si f n'est pas constante, alors elle n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{D}$.

(3) Soient $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{D}$ les zéros de f et soient $m_1, \ldots, m_N$ leurs multiplicités respectives. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 telle que $f = \lambda \prod_{1 \leq j \leq N} \varphi_{a_j}^{m_j}$,

où
$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$
Indication : on pourra appliquer (1) à une une fonction bien choisie.

Solution :

(1) Supposons que f n'est pas constante. D'après le principe du maximum pour tout $z \in \mathbb{D}$ nous avons
$$|f(z)| < 1 = \sup_{w \in \partial\mathbb{D}} |f(w)|.$$
Si f ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$, alors la fonction $g = 1/f$ est analytique sur $\mathbb{D}$, et pour $z \in \mathbb{D}$ on a
$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} > 1 = \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} |g(z)|$$
ce qui contredit le principe du maximum pour g.

(2) Le fait que $|f(z)| \to 1$ lorsque $|z| \to 1$ implique que l'ensemble des zéros de f dans $\mathbb{D}$ coincide avec l'ensemble des zéros de f dans le compact $\overline{\mathbb{D}}$. D'après le Théorème des zéros isolés f l'ensemble des zéros de f est discret dans $\mathbb{D}$ et de même donc dans $\overline{\mathbb{D}}$. Si cet ensemble était infini, on pourrait en extraire une suite convergente dans $\overline{\mathbb{D}}$, contredisant donc le fait que l'ensemble est discret.

(3) Pour $z \in \mathbb{D} \setminus \{a_1, \ldots, a_N\}$, posons :
$$h(z) = \frac{f(z)}{\prod_{1 \leq j \leq N} \varphi_{a_j}^{m_j}(z)}.$$
Alors h se prolonge à une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ telle que $|h(z)| \to 1$ lorsque $|z| \to 1$, qui ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$. Grâce à (1) on obtient donc que h est constante, d'oú la thèse.

Exercice 5. (1) Soit $r > 0$. On pose $\Gamma(t) = re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer :

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z}.$$

(2) Soient $a > 0$ et $b > 0$. On pose $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Reconnaître la courbe γ^* et calculer

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

en fonction de $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z}$.

(3) Exprimer I en fonction de

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

En déduire la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Solution :

(1) On a

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

(2) La courbe γ^* est l'ellipse d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si $a = b$ on revient au point (1). Si $a \neq b$, sans perte de généralité, on peut supposer $b < a$. Soit $0 < r < b$ et considérons les chemins :

$$\begin{array}{rcrlr}
\ell_1(t) & = & r + t(a-r) & \text{pour} & t \in [0,1], \\
\ell_2(t) & = & -a + t(a-r) & \text{pour} & t \in [0,1], \\
\Gamma_1(t) & = & re^{-it} & \text{pour} & t \in [0,\pi], \\
\Gamma_2(t) & = & re^{-it} & \text{pour} & t \in [\pi,2\pi], \\
\gamma_1(t) & = & a\cos(t) + ib\sin(t) & \text{pour} & t \in [0,\pi], \\
\gamma_2(t) & = & a\cos(t) + ib\sin(t) & \text{pour} & t \in [\pi,2\pi].
\end{array}$$

Considérons le chemin fermé δ_1 donné par la juxtaposition des chemins ℓ_1, γ_1, ℓ_2, et Γ_1, et le chemin fermé δ_2 donné par la juxtaposition de le chemin opposé de ℓ_1, Γ_2, le chemin opposé de ℓ_2, et γ_2. Comme $1/z$ admet une primitive sur δ_1 et sur δ_2 on a :

$$\int_{\delta_1} \frac{dz}{z} = \int_{\delta_2} \frac{dz}{z} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\delta_1} \frac{dz}{z} + \int_{\delta_2} \frac{dz}{z} \\
&= \int_{\ell_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\ell_2} \frac{dz}{z} + \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} - \int_{\ell_1} \frac{dz}{z} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} - \int_{\ell_2} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} \\
&= \int_{\gamma} \frac{dz}{z} - \int_{\Gamma} \frac{dz}{z},
\end{aligned}$$

car γ est donné par la juxtaposition de γ_1 et γ_2, et la juxtaposition de Γ_1 et Γ_2 donne l'opposé de Γ. Il suit que $I = 2\pi i$.

(3) On a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin(t) + ib\cos(t)}{a\cos(t) + ib\sin(t)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin(t) + ib\cos(t))\,(a\cos(t) - ib\sin(t))}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{(a^2+b^2)\sin(t)\cos(t)}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} dt + \int_0^{2\pi} \frac{iab(\sin^2(t) + \cos^2(t)}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} dt \\
&= iabJ - (a^2+b^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)\cos(t)}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} dt \\
&= iabJ,
\end{aligned}$$

car $\frac{\sin(t)\cos(t)}{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}$ est une fonction 2π-périodique et impaire. En utilisant (2), on obtient donc

$$J = \frac{2\pi}{ab}.$$