Corrigé Contrôle Continu du 1 mars 2016
(14h-16h)

Exercice I

(1) Déterminer le centre et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{7^n}(z-3+i)^n$.

(2) Déterminer le centre et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{1+3^n n^n}(z+i)^n$.

(3) Déterminer le centre et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2+n} z^{2n}$.

Solution : (1) Le centre de cette série entière est $3-i$. En utilisant le critère de la racine $n$ième, on a que le rayon de convergence est 7, qui est l'inverse de

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{7^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{7}.$$

(2) Le centre de cette série entière est $-i$. En utilisant le critère de la racine $n$ième, on a que le rayon de convergence est 3, qui est l'inverse de

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^n}{1+3^n n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^n}{3^n n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

(3) Le centre de cette série entière est 0. En utilisant le critère de la racine $n$ième, on a que le rayon de convergence est $\sqrt{2}/2$, qui est l'inverse de

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n}{n^2+n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{n}}(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2n}}} = \sqrt{2}.$$

Exercice II

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x+iy$. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = 6x + iy^2$.

(1) Déterminer la partie réelle P et la partie imaginaire Q de f.

(2) Déterminer l'ensemble U des points de $\mathbb{C}$ où P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

(3) Déterminer si U est ouvert, fermé, ni ouvert ni fermé. (Justifier soigneusement la réponse).

Solution : (1) On a $P(x,y) = 6x$ et $Q(x,y) = y^2$.

(2) On a $P_x(x,y) = 6$, $P_y(x,y) = 0$, $Q_x(x,y) = 0$, et $Q_y(x,y) = 2y$. On sait que P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann si et seulement si

$$\begin{cases} P_x(x,y) &= \quad Q_y(x,y) \\ P_y(x,y) &= -Q_x(x,y) \end{cases}$$

ce qui entraîne $y = 3$, c'est-à-dire

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 3\}.$$

(3) La droite U est un ensemble fermé de $\mathbb{C}$, car son complémentaire $\mathbb{C}\setminus U$ est ouvert. En fait, pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}\setminus U$ le disque $D(z_0, r)$ avec $0 < r < |\mathrm{Im}(z_0) - 3| = d(z_0, U)$ est contenu dans $\mathbb{C}\setminus U$.

Exercice III

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$, on pose

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

(1) Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(f) = P$ si et seulement si $c = -a$.

(2) On suppose $c = -a$. Déterminer toutes les fonctions holomorphes f sur $\mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re}(f) = P$

Solution : On vérifie facilement que P est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe f holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $P = \mathrm{Re}(f)$, et posons $Q = \mathrm{Im}(f)$. Grâce aux conditions de Cauchy-Riemann on a :

$$\left\{ \begin{array}{lclcr} P_x(x,y) & = & 2ax + 2by & = & Q_y(x,y) \\ P_y(x,y) & = & 2cy + 2bx & = & -Q_x(x,y) \end{array} \right. \tag{1}$$

En imposant l'égalité entre les dérivées partielles mixtes de Q, on obtient

$$Q_{xy}(x,y) = -2c = 2a = Q_{yx}(x,y),$$

c'est-à-dire $a = -c$.

Inversement, supposons $a = -c$. Le système (1) entraîne donc

$$Q(x,y) = b(y^2 - x^2) + 2axy + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$. La fonction

$$f_0(z) = ax^2 + 2bxy - ay^2 + i\left(b(y^2 - x^2) + 2axy\right)$$

est donc une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Re}(f_0) = P$.

(2) Si f et g sont deux fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g) = P$, alors $\mathrm{Re}(f - g) = 0$ et nous avons vu en TD que ceci implique que $f - g \equiv ik$ avec $k \in \mathbb{R}$. Les fonctions cherchées sont donc les fonctions de la forme

$$ax^2 + 2bxy - ay^2 + i\left(b(y^2 - x^2) + 2axy + k\right)$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice IV

Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité ouvert. Pour tout $a \in \mathbb{D}$ posons

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

(1) Montrer que φ_a est une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant $\overline{\mathbb{D}}$, telle que $\varphi_a(0) = -a$, $\varphi_a(a) = 0$,

$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2 \quad \text{et} \quad \varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

(2) Vérifier que la fonction réciproque de φ_a est φ_{-a}.
(3) Montrer que φ_a envoie le cercle unité sur le cercle unité.
(4) Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{C}$ où φ_a est une bijection.

Solution :

Si $a = 0$, on a $\varphi_a(z) = z$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et tous les points sont évidents.

(1) Soit $a \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$. La fonction φ_a est une fonction holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{\bar{a}}\right\}$ car quotient de deux fonctions, $z-a$ et $1-\bar{a}z$, qui sont analytiques sur $\mathbb{C}$, et $1-\bar{a}z$ s'annule seulement pour $z = 1/\bar{a} \notin \overline{\mathbb{D}}$. Une simple substitution montre que $\varphi_a(a) = 0$ et $\varphi_a(0) = -a$. Le calcul direct nous donne

$$\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$

et donc $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$ et $\varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$.

(2) On a

$$\begin{aligned}
\varphi_{-a}(\varphi_a(z)) &= \frac{\varphi_a(z)+a}{1+\bar{a}\varphi_a(z)} \\
&= \frac{\frac{z-a}{1-\bar{a}z}+a}{1+\bar{a}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}} \\
&= \frac{z-a+a-|a|^2z}{1-\bar{a}z} \cdot \frac{1-\bar{a}z}{1-\bar{a}z+\bar{a}z-|a|^2} \\
&= \frac{z-|a|^2z}{1-|a|^2} \\
&= z.
\end{aligned}$$

Ainsi, φ_a est bijective sur $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{\bar{a}}, -\frac{1}{\bar{a}}\right\}$, avec pour réciproque φ_{-a}.

(3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{|e^{it}-a|}{|1-\bar{a}e^{it}|} = \frac{|e^{it}-a|}{|e^{-it}-\bar{a}|} = 1,$$

ce qui montre que φ_a envoie le cercle unité dans le cercle unité. Il en est de même pour φ_{-a} et donc $\varphi_a(C(0,1)) = C(0,1)$.

(4) Le plus grand ouvert de $\mathbb{C}$ où φ_a est une bijection est $U = \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{\bar{a}}\right\}$.

Exercice V

(1) Donner une paramétrisation γ du segment de $1+i$ à $-1+i$.
(2) Calculer

$$\int_\gamma z dz.$$

(3) Donner une paramétrisation δ de l'arc de cercle centré en i et joignant $1+i$ à $-1+i$, orienté dans le sens trigonométrique.
(4) Calculer

$$\int_\delta z dz$$

en utilisant le calcul explicite pour les intégrales curvilignes. *Indication :* on peut utiliser $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$.
(5) Montrer

$$\int_\gamma z dz = \int_\delta z dz$$

en utilisant le Théorème de Cauchy.

Solution : (1) Une paramétrisation est $\gamma(t) = i + 1 - 2t$, pour $t \in [0,1]$.
(2) On a

$$\int_\gamma z dz = \int_0^1 (i+1-2t)(-2)dt = -2\left[(i+1)t - t^2\right]_0^1 = -2i.$$

(3) Une paramétrisation est $\delta(t) = i + e^{it}$ pour $t \in [0,\pi]$.
(4) On a

$$\begin{aligned}\int_\delta z dz &= \int_0^\pi (i+e^{it})ie^{it}dt = \int_0^\pi -e^{it}dt + \int_0^\pi ie^{i2t}dt \\ &= \int_0^\pi -(\cos(t)+\sin(2t))dt + i\int_0^\pi (\cos(2t)-\sin(t))dt \\ &= \left[-\sin(t) + \frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^\pi + i\left[\cos(t) + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi \\ &= -2i.\end{aligned}$$

(5) Soit Δ le demi-disque $\Delta = D(i,1) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 1\}$. Il est évident que Δ est un (P)-domaine dont le bord orienté coincide avec la juxtaposition de δ avec l'opposé de γ. La fonction z est holomorphe sur $\mathbb{C} \supset \overline{\Delta}$, donc d'après le Théorème de Cauchy on a :

$$\int_{\partial\Delta} z dz = \int_\delta z dz - \int_\gamma z dz = 0.$$