Contrôle Terminal du 10 janvier 2017

(13h30-15h30)

documents, calculatrice, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Exercice I

(1) Déterminer les zéros et les singularités isolées de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 + z - 4}{(1 - z^2)(3 - z)}$$

ainsi que leur nature, et calculer le résidu de f en chacun des points singuliers.

(2) Déterminer des nombres $A, B \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{z^2 + z - 4}{(1 - z^2)(3 - z)} = \frac{A}{1 - z^2} + \frac{B}{3 - z}\,.$$

(3) Déterminer la série de Laurent de f centrée en zéro dans la couronne $1 < |z| < 3$.

Exercice II

Soit $f(z)$ la fonction complexe définie par

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)}{(z-3)^2}.$$

(1) Déterminer où la fonction est définie et holomorphe, et ses singularités isolées, ainsi que leur nature.

(2) Calculer $\int_{C(3,1)} f(z)dz$, où le cercle est parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Exercice III

(1) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2}\,dx.$

(2) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+x+1}\,dx.$

Exercice IV

Soient f une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$), $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $A, B > 0$ tels que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^a$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module assez grand. Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus a. (*Indication :* on pourra utiliser les formules de Cauchy.)