Contrôle Continu du 1 mars 2016

(14h-16h)

TD, calculatrice, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Les notes prises en TD ne sont pas autorisées. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Exercice I

(1) Déterminer le centre et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{7^n}(z-3+i)^n$.

(2) Déterminer le centre et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{1+3^n n^n}(z+i)^n$.

(3) Déterminer le centre et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2+n} z^{2n}$.

Exercice II

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = 6x + iy^2$.

(1) Déterminer la partie réelle P et la partie imaginaire Q de f.
(2) Déterminer l'ensemble U des points de $\mathbb{C}$ où P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.
(3) Déterminer si U est ouvert, fermé, ni ouvert ni fermé. (Justifier soigneusement la réponse).

Exercice III

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$, on pose

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

(1) Montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(f) = P$ si et seulement si $c = -a$.
(2) On suppose $c = -a$. Déterminer toutes les fonctions holomorphes f sur $\mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re}(f) = P$

T.S.V.P.

Exercice IV

Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité ouvert. Pour tout $a \in \mathbb{D}$ posons

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

(1) Montrer que φ_a est une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant $\overline{\mathbb{D}}$, telle que $\varphi_a(0) = -a$, $\varphi_a(a) = 0$,

$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2 \quad \text{et} \quad \varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}.$$

(2) Vérifier que la fonction réciproque de φ_a est φ_{-a}.

(3) Montrer que φ_a envoie le cercle unité sur le cercle unité.

(4) Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{C}$ où φ_a est une bijection.

Exercice V

(1) Donner une paramétrisation γ du segment de $1+i$ à $-1+i$.

(2) Calculer

$$\int_\gamma z dz.$$

(3) Donner une paramétrisation δ de l'arc de cercle centré en i et joignant $1+i$ à $-1+i$, orienté dans le sens trigonométrique.

(4) Calculer

$$\int_\delta z dz$$

en utilisant le calcul explicite pour les intégrales curvilignes. *Indication :* on peut utiliser $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$.

(5) Montrer

$$\int_\gamma z dz = \int_\delta z dz$$

en utilisant le Théorème de Cauchy.